Université Pierre et Marie Curie — M1 - 4M025

Année 2015-2016 — Calcul des variations : outils et méthodes

Partiel du 24 février 2016

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seules les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.
- La partie A comptera pour les trois cinquièmes de la note, la partie B pour les deux cinquièmes de la note.

Partie A

Exercice 1. (Continuité de la translation dans L^p) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction et $h \in \mathbb{R}$, on définit la translatée $\tau_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\tau_h f(x) = f(x+h)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Etablir alors que $\tau_h f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

2. En déduire que si $f \in L^p(\mathbb{R})$, alors $\tau_h f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R})$.

3. Donner un contre-exemple dans le cas $p = \infty$.

Exercice 2. (Théorème de Stampacchia) Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subset H$ un sous-ensemble convexe, fermé non vide. On notera $\| \cdot \|$ la norme dans H héritée du produit scalaire. On considère $L \in H'$ et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire

(i) *continue* : il existe $M > 0$ tel que

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \text{pour tout } u, v \in H;$$

(ii) *coercive* : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad \text{pour tout } u \in H.$$

L'objet de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'un élément $u \in C$ tel que

$$a(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \text{pour tout } v \in C. \tag{1}$$

1. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $A : H \to H$ telle que $a(u,v) = \langle Au, v \rangle$ pour tout u, $v \in H$ et

(i') $\|Au\| \leq M\|u\|$;

(ii') $\langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2$.

2. En déduire que (1) est équivalent au problème suivant : pour tout $f \in H$, il existe un unique élément $u \in C$ tel que

$$\langle Au, v-u \rangle \geq \langle f, v-u \rangle \quad \text{pour tout } v \in C. \tag{2}$$

3. Soit $\rho > 0$ une constante qui sera déterminée ultérieurement. Montrer que (2) est encore équivalent à montrer qu'il existe un unique élément $u \in C$ tel que

$$u = P_C(\rho f - \rho A u + u),$$

où P_C désigne l'opérateur de projection orthogonale sur C. (*On pourra utiliser la caractérisation de la projection orthogonale à l'aide du produit scalaire*)

4. Montrer que P_C est une application 1-Lipschitzienne : pour tout v_1, $v_2 \in H$,

$$\|P_C(v_1) - P_C(v_2)\| \leq \|v_1 - v_2\|.$$

5. En déduire que pour ρ assez petit, l'application

$$\Psi : v \in H \mapsto \Psi(v) := P_C(\rho f - \rho A v + v)$$

est contractante (i.e. Lipschitzienne de constante de Lipschitz $L < 1$) et donc qu'elle admet un unique point fixe u. Conclure.

6. On suppose dans cette question que a est symétrique, i.e., $a(u, v) = a(v, u)$ pour tout u, $v \in H$.

a) Montrer que pour tout $L \in H'$, il existe un unique $g \in H$ tel que

$$\sqrt{a(g,g)} = \|L\|_{H'}, \quad L(v) = a(g, v) \text{ pour tout } v \in H.$$

b) Pour $f \in H$ fixé, justifier l'existence et l'unicité d'une solution au problème de minimisation

$$\min_{v \in C} a(v - g, v - g). \tag{3}$$

c) En déduire que u est solution de (1) si et seulement si c'est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min_{v \in C} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - L(v) \right\}.$$

Partie B

Exercice 3. On note

$$\langle u, v \rangle = \int_0^1 \big(u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big)dx, \ \forall u \in H^1([0,1]), \ \forall v \in H^1([0,1]), \tag{4}$$

le produit scalaire usuel de $H^1([0,1])$ et $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$ pour $u \in H^1([0,1])$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la forme bilinéaire a_λ sur $H^1([0,1])$ définie par

$$a_\lambda(u, v) = \lambda\big(u(0)v(0) + u(1)v(1)\big) + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx, \ \forall u \in H^1([0,1]), \ \forall v \in H^1([0,1]). \tag{5}$$

On note

$$N_\lambda(u) = \left(a_\lambda(u, u)\right)^{1/2}, \ \forall u \in H^1([0,1]), \ \forall \lambda \in (0, +\infty). \tag{6}$$

1. Vérifier que a_λ est une forme bilinéaire symétrique continue sur $H^1([0,1])$. Montrer que, si $\lambda > 0$, cette forme est coercive. Est-elle coercive pour $\lambda \leq 0$?

2. Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, il existe une constante $C_\lambda > 0$ (dépendant de $\lambda > 0$) telle que

$$N_\lambda(u) \leq C_\lambda \|u\|, \ \forall u \in H^1([0,1]). \tag{7}$$

3. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

(8) $$\|u\| \leq M N_\lambda(u),\ \forall u \in H^1([0,1]),\ \forall \lambda \geq 1.$$

4. Soit $f \in L^2([0,1])$ et soit $\lambda > 0$. On considère la fonctionnelle J_λ définie sur $H^1([0,1])$ par

(9) $$J_\lambda(u) = \frac{\lambda}{2}\big(u(0)^2 + u(1)^2\big) + \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx,\ \forall u \in H^1([0,1]).$$

4.1. Montrer qu'il existe un et un seul $u_\lambda \in H^1([0,1])$ tel que

(10) $$J_\lambda(u_\lambda) = \inf_{v \in H^1([0,1])} J_\lambda(v).$$

Montrer que

(11) $$\int_0^1 u_\lambda'(x)v'(x) = \int_0^1 f(x)v(x)dx,\ \forall v \in H_0^1([0,1]).$$

En déduire que $u_\lambda \in H^2([0,1])$ et exprimer u_λ'' en fonction de f. Montrer que

(12) $$u_\lambda'(1) = -\lambda u_\lambda(1) \text{ et } u_\lambda'(0) = \lambda u_\lambda(0).$$

4.2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $\lambda \geq 1$ telle que

(13) $$N_\lambda(u_\lambda) \leq C\|f\|_{L^2([0,1])},\ \forall \lambda \geq 1.$$

En déduire que la famille $(u_\lambda)_{\lambda \geq 1}$ est bornée dans $H^1([0,1])$ et que

(14) $$\lim_{\lambda \to +\infty} u_\lambda(0) = 0,\ \lim_{\lambda \to +\infty} u_\lambda(1) = 0.$$