Université Pierre et Marie Curie — M1 - 4M025

Année 2014-2015 — Calcul des variations : outils et méthodes

Partiel du 4 mars 2015

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seules les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.
- La partie A comptera pour les deux tiers de la note, la partie B pour un tiers.

Partie A

Dans cette partie, E désigne un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Exercice 1. (Conjuguée de Fenchel) Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre, *i.e.* $D(f) \neq \emptyset$ avec $D(f) = \{x \in E : f(x) < +\infty\}$. On définit la *conjuguée de Fenchel* f^* de f par :

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} [\langle p, x \rangle - f(x)], \qquad \forall p \in E.$$

1. Vérifier l'*inégalité de Young* :

$$f(x) + f^*(p) \geq \langle p, x \rangle, \qquad \forall x, p \in E.$$

2. Montrer que f^* est une fonction convexe et s.c.i. de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

3. Montrer que si f est convexe s.c.i. alors f^* est propre : on pourra, en le justifiant, séparer $\mathrm{Epi}(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$ d'un point $(x_0, t_0) \in E \times \mathbb{R}$ avec $f(x_0) > t_0$.

4. On définit la *bi-conjuguée de Fenchel* f^{**} de f par :

$$f^{**}(y) = \sup_{p \in E} [\langle y, p \rangle - f^*(p)], \qquad \forall y \in E.$$

Montrer que $f \geq f^{**}$.

5. On suppose que f est convexe, s.c.i. et positive et qu'il existe $x_0 \in E$ avec $f^{**}(x_0) < f(x_0)$. Montrer qu'il existe $p \in E$, $t \geq 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels pour tout $\varepsilon > 0$

$$(t + \varepsilon) f(x) - \langle p, x \rangle > \alpha > t f^{**}(x_0) - \langle p, x_0 \rangle, \qquad \forall x \in D(f),$$

et en déduire une contradiction.

6. Dans le cas général où f est convexe et s.c.i., considérer $g(x) = f(x) - \langle x, p \rangle + f^*(p)$ avec $p \in D(f^*)$, qui existe d'après la question 3. En déduire que f est convexe s.c.i. si et seulement si $f = f^{**}$.

Exercice 2. (Décomposition de Moreau) Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre, convexe et s.c.i.

1. Montrer que pour tout $z \in E$, la fonction $u \mapsto \Phi(u)$ définie par :

$$\Phi(u) = \frac{1}{2} \|u - z\|^2 + f(u)$$

a un minimum unique sur E, noté $\mathrm{prox}_f(z)$ (on pourra utiliser le résultat de la question 3 de l'exercice 1).

2. On considère la propriété :

$$z = x + y, \qquad f(x) + f^*(y) = \langle x, y\rangle, \quad x, y, z \in E.$$

Etablir que

$$\langle x, y\rangle - f(x) \geq \langle u, y\rangle - f(u), \qquad \forall u \in E$$

et en déduire que

$$\Phi(u) - \Phi(x) \geq \frac{1}{2}\|u - x\|^2$$

donc que $x = \mathrm{prox}_f(z)$. Etablir de même que $y = \mathrm{prox}_{f^*}(z)$.

3. Réciproquement soit $z \in E$ et $x = \mathrm{prox}_f(z)$, $y = \mathrm{prox}_{f^*}(z)$. En comparant $\Phi(tu + (1-t)x)$ et $\Phi(x)$, en déduire que, pour $y' = z - x$

$$f(x) + f^*(y') = \langle x, y'\rangle.$$

Utiliser alors la question 2 pour conclure que $y' = y$.

4. Soit P un cône convexe fermé et f sa fonction indicatrice ($f(x) = 0$ si $x \in P$ et $f(x) = +\infty$ si $x \notin P$). Etablir que $\mathrm{prox}_f(z) = \Pi_P(z)$ où Π_P est l'opérateur de projection sur P. Le cône polaire est défini par $P^\perp = \{y \in E : \langle y, x\rangle \leq 0, \forall x \in P\}$. Etablir l'équivalence entre

$$z = x + y, \quad x \in P, \quad y \in P^\perp, \quad \langle x, y\rangle = 0$$

et

$$x = \Pi_P(z), \qquad y = \Pi_{P^\perp}(z).$$

Partie B

Exercice 3. Dans cet exercice, $I =]-1, 1[$. On considère la forme bilinéaire a dans $H_0^1(I)$ définie par

$$\forall u \in H_0^1(I),\, \forall v \in H_0^1(I),\, a(u, v) = \int_I (u'v' + uv - \lambda u(0)v)dx. \tag{1}$$

1. Montrer que a est continue.

2. Montrer que

$$\text{pour tout } u \in H_0^1(I),\, |u(0)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|u'\|_{L^2(I)}. \tag{2}$$

3. Montrer que si $|\lambda| \leqslant 1$, alors la forme bilinéaire a est coercive.

4. Montrer que si $|\lambda| \leqslant 1$, alors, la propriété suivante est satisfaite

$$\begin{cases} \forall f \in L^2(I), \text{ il existe un et un seul } u \in H^2(I) \cap H_0^1(I) \text{ tel que} \\ -u'' + u - \lambda u(0) = f \text{ dans } L^2(I). \end{cases} \tag{3}$$

5. Par le calcul, vérifier qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in H^2(I) \cap H_0^1(I)$ tels que

$$-u'' + u - \lambda u(0) = 0 \text{ dans } L^2(I), \tag{4}$$

$$u \neq 0 \text{ dans } L^2(I), \tag{5}$$

(et donc (3) est faux pour cette valeur de λ).