Université Pierre et Marie Curie — M1 - M025

Année 2013-2014 — Calcul des variations : outils et méthodes

Partiel du 19 mars 2014

– Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
– Seules les notes de cours sont autorisées.
– Durée : 3 heures.
– Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.
– La partie A comptera pour les deux tiers de la note, la partie B pour un tiers.

Partie A

I. Opérateurs linéaires

Soit E, F deux espaces de Banach, $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans lui-même.

1) $\mathcal{A}$ est l'ensemble des élements **inversibles** de $\mathcal{L}(E)$.
a) Montrer que si $\|T\| < 1$ alors $Id - T \in \mathcal{A}$ avec $(Id - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$.
b) En déduire que si $T \in \mathcal{A}$ et $S \in \mathcal{L}(E)$ satisfont $\|S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$, alors $T + S \in \mathcal{A}$ avec :

$$(T+S)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (T^{-1}S)^k T^{-1}.$$

c) Conclure que $\mathcal{A}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$ et que l'application $T \mapsto T^{-1}$ y est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$).

2) On rappelle que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est **compact** si $T(\mathcal{B}_E)$ est relativement compact dans F. $\mathcal{K}(E,F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$) est l'ensemble des élements compacts de $\mathcal{L}(E,F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$).
a) Montrer que $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.
b) Etablir que si $T \in \mathcal{K}(E,F)$, $\{x_n\}$ converge faiblement vers x, implique $\{Tx_n\}$ converge fortement vers Tx.
c) Montrer que si E est réflexif, la réciproque de b) est vraie.
d) Soit $T \in \mathcal{K}(E,F)$ et T^* son adjoint. Montrons que $T^* \in \mathcal{K}(F', E')$: soit v_n une suite dans $\mathcal{B}_{F'}$ et K le compact $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$. On considère la famille $\Phi = \{\phi_n\}$ de fonctions continues sur K définies par $\phi_n(x) = \langle v_n, x\rangle$. Vérifier que le théorème d'Ascoli s'applique à Φ pour en déduire l'existence d'une sous suite $\{v_{n_k}\}$ avec :

$$\sup_{x\in K} |\langle v_{n_k}, x\rangle - \langle v_{n_j}, x\rangle| \to 0, \quad \text{quand} \quad k, j \to \infty$$

et en conclure que $\{T^*(v_n)\}$ possède une sous-suite convergente.

3) $\mathcal{S}$ est l'ensemble des élements **surjectifs** de $\mathcal{L}(E,F)$.
a) On rappelle que le théorème de l'application ouverte établit que si $T \in \mathcal{S}$, il existe $c > 0$ avec :

$$c\mathcal{B}_F \subset T(\mathcal{B}_E).$$

En déduire que :

$$(*) \qquad \|T^*y^*\| \geq c\|y^*\|, \qquad \forall y^* \in F'.$$

(Utiliser, pour $x^* = T^*y^*$, que $\|x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1}\langle x, x^*\rangle$.)
b) Réciproquement si $(*)$ est vérifié, montrer que $c\mathcal{B}_F \subset \overline{T(\mathcal{B}_E)}$. (Séparer strictement $y \notin \overline{T(\mathcal{B}_E)}$ et $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ puis montrer que $\|y\| \geq c$). On en déduit (comme dans la preuve du théorème de l'application ouverte) que $c\mathcal{B}_F \subset T(\mathcal{B}_E)$ donc que T est surjective.
c) En déduire que $\mathcal{S}$ est ouvert.

II. Fonctions convexes s.c.i.

Soit E un espace de Banach et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, convexe et s. c. i. .
On suppose $C = int(dom(f)) \neq \emptyset$.

1) Soit $x_0 \in C$ et $a > f(x_0)$. On pose $D = \{x \in E; f(x) \leq a\}$.
a)Vérifier que D est un fermé contenant x_0 puis que pour tout $x \in E$ il existe $t > 0$ tel que $x_0 + t(x - x_0) \in D$ (utiliser le fait que $x_0 \in C$).
En déduire que $E = x_0 + \cup_{n\geq 1} n(D - x_0)$.
Conclure qu'il existe un voisinage de x_0 où f est majorée.

2) Montrer que f est continue (et même localement Lipschitz) sur C.

Partie B

Exercice 1. Soit α un réel. On considère la fonction $u_\alpha :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

(1) $$\text{pour tout } x \text{ dans }]0,1],\ u_\alpha(x) = x^\alpha.$$

1. Donner les valeurs de α pour lesquelles $u_\alpha \in L^2(]0,1[)$.
2. Donner les valeurs de α pour lesquelles $u_\alpha \in H^1(]0,1[)$.
3. Soit p un réel strictement plus grand que 1. Montrer l'existence de u dans $H^1_0(]0,1[)$ tel que

(2) $$\frac{u}{x^p} \notin L^2(]0,1[).$$

Exercice 2. (Inégalité de Hardy.) On s'intéresse à la propriété suivante :

(3) $$\text{il existe } C > 0 \text{ tel que, pour tout } u \text{ dans } H^1_0(]0,1[),\ \left\|\frac{u}{x}\right\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant C\left\|u'\right\|_{L^2(]0,1[)}.$$

On note $C_0^\infty(]0,1[)$ l'ensemble des fonctions $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $[0,1]$ qui s'annulent sur un voisinage de 0 et sur un voisinage de 1.
1. Montrer que, pour tout u dans $C_0^\infty(]0,1[)$,

(4) $$2\int_0^1 \frac{uu'}{x}dx = \int_0^1 \frac{u^2}{x^2}dx.$$

2. Soit u dans $C_0^\infty(]0,1[)$. En remarquant que

(5) $$\text{pour tout } x \text{ dans }]0,1],\ \left(u'(x) - \frac{u(x)}{2x}\right)^2 \geqslant 0,$$

montrer que

(6) $$\left\|\frac{u}{x}\right\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant 2\left\|u'\right\|_{L^2(]0,1[)}.$$

3. Montrer (3).

Exercice 3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour toute fonction u dans $H^2(]0,1[)\cap H^1_0(]0,1[)$,

$$\|u'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leqslant \|u\|_{L^2(]0,1[)}\|u''\|_{L^2(]0,1[)}. \tag{7}$$

Est-ce que la propriété « il existe $C>0$ tel que, pour tout $u\in H^2(]0,1[)$ tel que $u(0)=0$, $\|u'\|^2_{L^2(]0,1[)} \leqslant C\|u\|_{L^2(]0,1[)}\|u''\|_{L^2(]0,1[)}$ » est vraie ?