Université Pierre et Marie Curie — M1 - MM025

Année 2011-2012 — Calcul des variations : outils et méthodes

Partiel du 5 mars 2012

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1.
Soit $E = L^2([0,1];\mathbb{R})$. On considère la partie F de E suivante :

$$F := \left\{ f_{k,l},\ (k,l) \in \mathbb{N}^2 \text{ t.q. } 1 \leq k < l \right\},$$

où les fonctions $f_{k,l}$ sont définies par

$$f_{k,l}(x) = \sin(2\pi kx) + k\sin(2\pi lx).$$

On définit *l'adhérence séquentielle faible* d'une partie A de E comme l'ensemble des limites possibles, pour la convergence faible, des suites de points de A.

1. Montrer que pour tout $f \in C^1([0,1])$,

$$\int_{[0,1]} f(x)\sin(2\pi kx)dx \to 0 \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

2. En déduire la convergence faible suivante

$$\sin(2\pi kx) \xrightarrow{L^2} 0 \text{ lorsque } k \to +\infty.$$

(Il s'agit du *lemme de Riemann-Lebesgue.*)

3. Calculer la norme de $f_{k,l}$ dans L^2 pour $1 \leq k < l$.

4. Déduire de ce qui précède que l'adhérence séquentielle faible de F est l'ensemble $\tilde{F} = \{\sin(2\pi kx), k \in \mathbb{N}^*\} \cup F$.

5. Quelle est l'adhérence séquentielle faible de $\tilde{F}$? Commenter.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $<,>$.
1. a) Soit $a = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$, une suite d'éléments de H et $x \in H$ tels que $a_n \rightharpoonup x$ faiblement dans H lorsque $n \to \infty$ et tels que

$$\|a_n\|_H \to \|x\|_H \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Montrer qu'alors

$$a_n \to x \text{ fortement dans } H \text{ lorsque } n \to \infty.$$

[On pourra développer l'expression $\|a_n - x\|_H^2$].

b) Soit C une partie convexe fermée non vide de H. Montrer qu'il existe un unique élément $u \in C$ de norme minimale.

c) Soit $\{w_n\}, n \in \mathbb{N}$, une suite d'éléments de C telle que

$$\|w_n\|_H \to \|u\|_H \text{ lorsque } n \to \infty.$$

Montrer que

$$w_n \to u \text{ fortement dans } H \text{ lorsque } n \to \infty.$$

d) Soit $a = \{a_n\}, n \in \mathbb{N}$ une suite d'éléments de H. On pose

$$K(a) = \cup_{m\in\mathbb{N}}\{\sum_{j=0}^{m} c_j a_j, \text{ avec } c_j \geq 0, \sum_{j=0}^{m} c_j = 1\}$$

Vérifier que $K(a)$ est l'enveloppe convexe de la suite: le plus petit convexe contenant tous les a_n.

2. Soit $T \in \mathcal{L}(H, H)$ une application linéaire continue de H dans lui-même telle que

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H,H)} \leq 1.$$

Pour $n \in N$ on pose $T^0 = Id_H$ et par induction $T^{n+1}(u) = T(T^n(u))$, $\forall u \in H$.

a) Vérifier que $\forall n \in N$, $\forall u \in H$

$$\|T^n(u)\| \leq \|u\|.$$

Soit w un élément quelconque non nul de H. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $a = \{a_n\}$ d' éléments de H définie par $a_n = T^n(w)$. On note C la fermeture de $K(a)$.

b) Montrer que $T(K(a)) \subset K(a)$ et que $T(C) \subset C$.

c) Montrer qu'il existe un unique élément $u \in C$ de norme minimale et que $T(u) = u$.

Que peut-on dire de u si on suppose de plus que $\|T\|_{\mathcal{L}(H,H)} < 1$?.

3. On considère maintenant la suite $\{w_n\}, n \geq 1$, définie par

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T^j(w).$$

a) Soit $v = \sum_{j=0}^{m} c_j T^j(w)$ un élément de $K(a)$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(v).$$

Vérifier que

$$\|w_n - v_n\| \leq \frac{2m}{n}\|w\|.$$

b) Montrer que $\forall v \in C$,

$$\|w_n\| \leq \frac{2m}{n}\|w\| + \|v\|.$$

c) En déduire que

$$\|w_n\| \to \inf\{\|v\|_H, v \in C\}.$$

d) Montrer que la suite $\{w_n\}$ converge dans H vers u.

Partie B

Exercice 1. Soient deux réels a et b tels que $a < b$. Soient $I =]a, b[$ et $p \in [1, +\infty]$. On définit $q \in [1, +\infty]$ par

$$q = \frac{p}{p-1} \text{ si } p \in]1, +\infty[, \; q = 1 \text{ si } p = +\infty \text{ et } q = +\infty \text{ si } p = 1. \tag{1}$$

Soit X le dual de l'espace de Banach $W_0^{1,p}(I)$. Pour $f \in L^q(I)$, on définit $L_f : W^{1,p}(I) \to \mathbb{R}$ par

$$\forall u \in W_0^{1,p}(I), \; L_f(u) = \int_I f(x) u'(x) dx. \tag{2}$$

1. Montrer que $L_f \in X$.
2. Montrer que l'application $L : f \in L^q(I) \mapsto L_f \in X$ est une application linéaire continue.
3. Donner le noyau de L.
4. Montrer que, si $p \in [1, +\infty)$, l'application L est surjective.

Exercice 2. Pour $h \in \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$, on définit $\tau_h u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; (\tau_h u)(x) = u(x + h). \tag{3}$$

1. Montrer que τ_h est une isométrie bijective de $L^2(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.
2. On suppose dans cette question que u est dans $H^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \; \|\tau_h u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leqslant C|h|. \tag{4}$$

(Indication : on rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, \; u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt.) \tag{5}$$

3. Soit $u \in L^2(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que (4) soit vérifié. On veut montrer que

$$u \in H^1(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 et à support compact.

3.1. Montrer que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \; \left| \int_{\mathbb{R}} \big(u(x+h) - u(x)\big) \varphi(x) dx \right| \leqslant C|h| \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

3.2. Montrer que

$$\forall h \in \mathbb{R}, \; \left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \big(\varphi(x-h) - \varphi(x)\big) dx \right| \leqslant C|h| \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{8}$$

3.3. Montrer que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x) \varphi'(x) dx \right| \leqslant C \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{9}$$

3.4. Montrer (6).