Université Pierre et Marie Curie | M1 - 4M025

Année 2015-2016 | Calcul des variations : outils et méthodes

Examen du 11 mai 2016

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seules les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue inférieurement. On suppose qu'il existe $c > 0$ et $1 < p < \infty$ tels que

$$0 \leq f(s) \leq c(1 + |s|^p) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

On définit la fonctionnelle $J : L^p(0,1) \to \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \int_0^1 f(u(x))\, dx \quad \text{pour tout } u \in L^p(0,1).$$

On se propose de montrer que f est convexe si et seulement si J est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(0,1)$.

1. On suppose dans cette question que f est convexe.

1.1. Montrer que J est fortement semi-continue inférieurement dans $L^p(0,1)$.

1.2. Montrer que J est convexe.

1.3. En déduire que J est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(0,1)$.

2. Supposons maintenant que J est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(0,1)$. Soient $\lambda \in [0,1]$ et a, $b \in \mathbb{R}$.

2.1. Soit $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique, i.e., $u(x+1) = u(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}$. On définit la moyenne de u par $\bar{u} = \int_0^1 u(y)\, dy$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n(x) = u(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $u_n \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans $L^p(0,1)$.

2.2. Soit $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 1-périodique dont la restriction à l'intervalle $[0,1[$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,\lambda]$. Soit $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $L^p(0,1)$ définie par $\ell_n(x) = \ell(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la question précédente, montrer que $\ell_n a + (1-\ell_n)b \rightharpoonup \lambda a + (1-\lambda)b$ et $f(\ell_n a + (1-\ell_n)b) \rightharpoonup \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$ faiblement dans $L^p(0,1)$.

2.3. De la séquentielle faible semi-continuité inférieure de J dans $L^p(0,1)$, en déduire que la fonction f est convexe.

Exercice 2. Soit $1 < p < \infty$. Pour tout $f \in L^p(0,+\infty)$, on pose

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \quad \text{pour tout } x > 0.$$

On se propose de montrer l'inégalité de Hardy :

$$\|F\|_{L^p(0,+\infty)} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p(0,+\infty)}.$$

1. On suppose dans cette question que $f \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$ et $f \geq 0$.

1.1. Montrer alors que $F \in \mathcal{C}^1(]0,+\infty[) \cap L^p(0,+\infty)$ et que

$$xF'(x) = -F(x) + f(x) \quad \text{pour tout } x > 0.$$

1.2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \, dx = \frac{p}{p-1} \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x) \, dx.$$

(*Indication : on pourra utiliser une intégration par parties*)

1.3. En déduire l'inégalité de Hardy pour les fonctions $f \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$ avec $f \geq 0$.

2. En appliquant la question précédente à $|f|$, en déduire l'inégalité de Hardy pour les fonctions $f \in \mathcal{C}_c(]0,+\infty[)$.

3. En raisonnant par approximation, montrer la validité de l'inégalité de Hardy pour les fonctions $f \in L^p(0,+\infty)$ générales.

Partie B

Exercice 3. Soit $I =]0,1[$. Soient $f \in L^2(I)$ et $u \in H^2(I)$ tels que

$$-u'' + u = f \text{ dans } L^2(I). \tag{1}$$

On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(0) \leq M \text{ et } u(1) \leq M, \tag{2}$$

$$\text{pour presque tout } x \text{ dans } I, \ f(x) \leq M. \tag{3}$$

On veut montrer que

$$\text{pour tout } x \text{ dans } I, \ u(x) \leq M. \tag{4}$$

Soit $G : R \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\text{pour tout } y \text{ dans }]-\infty, M], \ G(y) = 0, \tag{5}$$

$$G \text{ est strictement croissante sur } [M, +\infty[. \tag{6}$$

1. Montrer que la fonction $x \in I \mapsto G \circ u(x) = G(u(x)) \in \mathbb{R}$ est dans $H_0^1(I)$.

2. En multipliant (1) par $G \circ u$, vérifier que

$$\int_I u'(x)^2 G'(u(x))dx + \int_I (u(x) - M)G(u(x))dx = \int_I (f(x) - M)G(u(x))dx. \tag{7}$$

3. Montrer que

$$\int_I (u(x) - M)G(u(x))dx \leq 0. \tag{8}$$

4. Montrer (4).

Exercice 4. Soit H l'ensemble des fonctions $u \in C^0(]-1,0[\cup]0,1[)$ telles que

$$u \text{ restreint à }]0,1[\text{ est dans } H^1(]0,1[), \tag{9}$$

$$u \text{ restreint à }]-1,0[\text{ est dans } H^1(]-1,0[). \tag{10}$$

Pour u dans H, on note u_1 la restriction de u à $]-1,0[$ et u_2 la restriction de u à $]0,1[$ et on définit $u' \in L^2(]-1,1[)$ par

$$u' = \begin{cases} u_1' \text{ sur }]-1,0[, \\ u_2' \text{ sur }]0,1[. \end{cases} \tag{11}$$

Pour u dans H et v dans H, on définit

$$\langle u, v\rangle = \int_{-1}^{0} \big[u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big]\,dx + \int_{0}^{1} \big[u'(x)v'(x) + u(x)v(x)\big]\,dx. \tag{12}$$

Pour $u \in H$, on note

$$u(0^+) = \lim_{x\to 0^+} u(x), \tag{13}$$

$$u(0^-) = \lim_{x\to 0^-} u(x). \tag{14}$$

Soit $\lambda \geq 0$ et soit $f \in C^0([-1,1])$. On définit $J_\lambda : H \to \mathbb{R}$ par

$$J_\lambda = \frac{1}{2}\langle u, u\rangle + \frac{\lambda}{2}(u(0^+) - u(0^-))^2 + \int_{-1}^{1} \frac{1}{6}\big[u(x)^6 - f(x)u(x)\big]\,dx. \tag{15}$$

1. Montrer que les limites dans (13) et dans (14) existent bien. Montrer que $H \subset L^6(]-1,1[)$.
2. Montrer que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur H.
3. Montrer que H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est un espace de Hilbert.
4. Montrer que J_λ est de classe C^1. Donner, pour u et v dans H, $J_\lambda'(u)v$.
5. Caractériser les solutions $u \in H$ de $J_\lambda'(u) = 0$, c'est-à-dire donner l'équation différentielle satisfaite par u sur $]-1,0[\cup]0,1[$ ainsi que les conditions en -1, 0 et 1, puis montrer que, réciproquement, $u \in H$ satisfaisant l'équation et les conditions en -1, 0 et 1 est solution de $J_\lambda'(u) = 0$.
6. Montrer que J_λ est strictement convexe et que

$$\lim_{\langle u,u\rangle \to +\infty} J_\lambda(u) = +\infty. \tag{16}$$

7. Montrer qu'il existe un et un seul $\bar{u}_\lambda$ dans H tel que

$$\text{pour tout } v \text{ dans } H,\ J_\lambda(\bar{u}_\lambda) \leq J_\lambda(v). \tag{17}$$

8. Montrer qu'il existe $C > 0$ (dépendant de f mais pas de $\lambda \in [0,+\infty[$) tel que

$$\text{pour tout } \lambda \text{ dans } [0,+\infty[,\ \langle \bar{u}_\lambda, \bar{u}_\lambda\rangle \leq C. \tag{18}$$