Université Pierre et Marie Curie — M1 - M025

Année 2013-2014 — Calcul des variations : outils et méthodes

Examen du 15 mai 2014

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. Transport optimal
Soit Z un espace métrique compact, on note $\mathcal{C}(Z)$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur Z et $\mathcal{M}(Z)$ son dual (ensemble des mesures boréliennes régulières). Soient X et Y deux espaces métriques compacts.

1. On définit $L : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) \to \mathcal{C}(X \times Y)$ par

$$L(\phi, \psi)(x, y) = \phi(x) + \psi(y), \qquad \forall x \in X, y \in Y.$$

Vérifier que L est un opérateur linéaire continu et montrer que son adjoint $L^* : \mathcal{M}(X \times Y) \to \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(Y)$ est défini par $L^*\pi = (\pi_X, \pi_Y)$ où π_X (resp. π_Y) dénote la marginale de π sur X (resp. Y), i.e. telle que

$$\begin{aligned}
\int_{X\times Y} \phi(x)\pi(dx, dy) &= \int_X \phi(x)\pi_X(dx), \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}(X),\\
\int_{X\times Y} \psi(y)\pi(dx, dy) &= \int_Y \psi(y)\pi_Y(dy), \qquad \forall \psi \in \mathcal{C}(Y).
\end{aligned}$$

2. Soient $c \in \mathcal{C}(X \times Y)$ et $\mu \in \Delta(X)$ (resp. $\nu \in \Delta(Y)$) une probabilité borélienne régulière sur X (resp. Y). On introduit $f : \mathcal{C}(X \times Y) \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta \le c, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$g(\phi, \psi) = -\int_X \phi(x)\mu(dx) - \int_Y \psi(y)\nu(dy).$$

Vérifier que f et g sont convexes s.c.i. propres et que leurs conjuguées de Fenchel vérifient pour tout $\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)$,

$$f^*(\pi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{X\times Y} c(x, y)\pi(dx, dy) & \text{si } \pi \ge 0, \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$g^*(-L^*\pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\pi_X, \pi_Y) = (\mu, \nu), \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En déduire en utilisant le théorème de Fenchel-Rockafellar que

$$\min_{\substack{\pi\in\mathcal{M}(X\times Y)\\ \pi\geq 0,\pi_X=\mu,\pi_Y=\nu}} \int_{X\times Y} c(x,y)\pi(dx,dy) = \sup_{\substack{(\phi,\psi)\in\mathcal{C}(X)\times\mathcal{C}(Y)\\ \phi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)}} \int_X \phi(x)\mu(dx) + \int_Y \psi(y)\nu(dy).$$

Remarque : le terme de gauche est la version “relaxée” du problème de Monge où l'on cherche α mesurable de X dans Y qui transporte μ sur ν (i.e. la mesure image de μ par α est ν) et qui minimise $\int_X c(x,\alpha(x))\mu(dx)$.

Exercice 2. Théorème ergodique faible
Soit X un espace de Hilbert, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X, $\Omega[x_n]$ l'ensemble de ses points d'accumulation faible et

$$\overline{x}_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$$

sa moyenne de Cesaro. Soit F un convexe fermé non vide de X.

1. On suppose que $\|x_n - f\|$ converge, pour tout $f\in F$. Montrer que $\Omega[x_n]\cap F$ et $\Omega[\overline{x}_n]\cap F$ contiennent au plus un point.
2. Soit P_F l'opérateur de projection sur F. On suppose que $P_F(x_n)$ converge vers ζ et que la suite $\{x_n\}$ est bornée. Montrer que $\Omega[x_n]\cap F$ et $\Omega[\overline{x}_n]\cap F$ se réduisent à $\{\zeta\}$.
3. On suppose que $\|x_n - f\|$ décroit pour tout $f\in F$. Montrer que $\|x_n - P_F(x_n)\|$ décroit et en déduire, en utilisant l'inégalité du parallélogramme, que $P_F(x_n)$ est une suite de Cauchy.

Soit T une application non dilatante de X dans lui même : $\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|, \forall x,y\in X$. Soit $x\in X$ et $\{x_n\}$ la suite des itérés : $x_0=x,\ldots,x_n=T^nx$. On note S l'ensemble des points fixes de T.

4. Montrer que S est convexe.
5. On suppose que la suite $\{\overline{x}_n\}$ est bornée. Soit $y\in X$. Déduire de $\|T^kx-y\|\geq\|T^{k+1}x-Ty\|$ que

$$0\leq\|T^kx-Ty\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2+\|Ty-y\|^2+2\langle T^kx-Ty,Ty-y\rangle$$

puis en prenant la moyenne et en passant à la limite, que pour tout $p\in\Omega[\overline{x}_n]$

$$0\leq\|Ty-y\|^2+2\langle p-Ty,Ty-y\rangle.$$

Etablir alors que $\emptyset\neq\Omega[\overline{x}_n]\subset S$.
6. Montrer que $\{x_n\}$ converge faiblement si et seulement si $S\neq\emptyset$ et $\Omega[x_n]\subset S$. (Utiliser 1. et 5.).
7. Soit T une application non dilatante de C, convexe fermé borné non vide de X, dans lui même. Montrer que pour tout $z\in C$ la suite $z_n=T^nz$ converge faiblement en moyenne vers un point fixe ζ de T, qui est la limite forte de la suite P_ST^nz. (Utiliser 1., 2., 3., 4., 5.).

Partie B

Exercice 3. Soit γ un réel et soit $f\in L^2(]0,1[)$. On s'intéresse au problème suivant : trouver $u\in H^2(]0,1[)$ tel que

(1) $$-u''+\gamma u = f \text{ dans } L^2(]0,1[),$$

(2) $$u'(0)=0 \text{ et } u'(1)=u(1).$$

Soit $a : H^1(]0,1[) \times H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall (u,v) \in H^1(]0,1[),\ a(u,v) = \int_0^1 (u'(x)v'(x) + \gamma u(x)v(x))dx - u(1)v(1). \tag{3}$$

Soit $L : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ Lv = \int_0^1 fv dx. \tag{4}$$

1. Vérifier que a est une application bilinéaire continue.
2. Montrer que, si $u \in H^2(]0,1[)$ vérifie (1) et (2), alors

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ a(u,v) = Lv. \tag{5}$$

3. Réciproquement, montrer que, si $u \in H^1(]0,1[)$ vérifie (5), alors u appartient à $H^2(]0,1[)$ et vérifie (1) et (2).
4. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall u \in H^1(]0,1[),\ u(1)^2 \leqslant \varepsilon \int_0^1 u'(x)^2 dx + M_\varepsilon \int_0^1 u^2(x)dx. \tag{6}$$

Indication : on pourra remarquer que

$$\forall x \in [0,1],\ u^2(1) = u^2(x) + 2\int_x^1 u(s)u'(s)ds. \tag{7}$$

5. Montrer que, si $\gamma > 0$ est assez grand, alors il existe un et un seul $u \in H^2(]0,1[)$ tel que l'on ait (1) et (2).
6. Montrer l'existence de $\mu > 0$ tel que, si $\tilde{u}(x) = \mathrm{ch}(\mu x)$, alors $\tilde{u}'(1) = \tilde{u}(1)$.
7. On choisit $\gamma = \mu^2$. Montrer l'existence de $f \in L^2(]0,1[)$ tel qu'il n'existe pas de $u \in H^2(]0,1[)$ satisfaisant (1) et (2).

Exercice 4. Soit μ un nombre réel strictement positif. On considère la fonctionnelle $J : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall u \in H^1(]0,1[),\ J(u) = \int_0^1 (u'(x)^2 - \mu u(x)^2)dx. \tag{8}$$

Soient α et β deux réels. On définit l'ensemble C par

$$C = \{u \in H^1(]0,1[);\ u(0) = \alpha \text{ et } u(1) = \beta\}. \tag{9}$$

1. Montrer que C est un convexe fermé de $H^1(]0,1[)$.
2. Pour $u \in H^1(]0,1[)$ et $v \in H^1(]0,1[)$, donner $J'(u)v$.
3. Soit $u \in C$ tel que

$$\forall v \in C,\ J(u) \leqslant J(v). \tag{10}$$

Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$\forall v \in H^1(]0,1[),\ J'(u)v = \lambda_1 v(0) + \lambda_2 v(1). \tag{11}$$

En déduire que u appartient à $C^2([0,1])$ et vérifie

$$u'' + \mu u = 0. \tag{12}$$

4. Montrer l'existence de $\mu_0 > 0$ tel que, pour tout $\mu \in]0, \mu_0[$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'infimum de J sur C est atteint en une fonction u et une seule. Donner cette fonction.

5. On suppose dans cette question que $\mu = \pi^2$. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que l'infimum de J sur C n'est pas atteint.

6. Déduire de la question précédente que

$$\inf \left\{ \int_0^1 u'(x)^2 dx;\ u \in H_0^1(]0,1[) \text{ et } \int_0^1 u^2(x) dx = 1 \right\} \leqslant \pi^2. \tag{13}$$

En utilisant (13), montrer que pour tout $\mu > \pi^2$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, l'infimum de J sur C vaut $-\infty$.