Examen du 24 avril 2013

- Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B), à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. En particulier, les notes de TD et les calculettes ne sont pas autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. Soit V un espace de Banach réflexif et séparable (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité (V', V)) et soit A une application de V dans V' satisfaisant:
1) *monotone*:

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V,$$

2) *hémicontinue*:

$$t \mapsto \langle A(u + tv), v \rangle \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \quad \forall u, v \in V,$$

3) *bornée*: A envoie les parties bornées de V sur des bornés de V'.

1.1. Soit $\{u_n\}$ une suite convergeant vers u dans V. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ et $\zeta \in V'$ tels que $Au_{n_k} \rightharpoonup \zeta$ dans V'. Utiliser la monotonie pour en déduire que

$$\langle \zeta - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V.$$

En prenant $v = u + tw$ en déduire en utilisant l'hémicontinuité que

$$\langle \zeta - Au, w \rangle \leq 0, \quad \forall w \in V,$$

puis que $\zeta = Au$. Conclure que toute la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement.

1.2. Soit K un convexe fermé borné non vide de V. Utiliser la séparabilité pour construire une suite croissante de sous-espaces de dimension finie V_i telle que la famille de convexes $K_i = K \cap V_i$ soit dense dans K.

1.3. Montrer qu'il existe J_i linéaire de V' dans V_i telle que

$$\langle g, v \rangle = (J_i g | v)_i \quad \forall g \in V', v \in V_i.$$

où $(\cdot|\cdot)_i$ est le produit scalaire dans l'espace de dimension finie V_i. Vérifier que $g_n \rightharpoonup g$ implique $J_i g_n \to J_i g$.
Soit Π_i la projection sur le convexe fermé K_i et $f \in V'$. Montrer, en utilisant la question **1.1** que l'application T_i de K_i dans lui même, définie par:

$$T_i(v) = \Pi_i(v - J_i Av + J_i f)$$

est continue. Utiliser alors le théorème de Brouwer (en dimension finie) pour obtenir un point fixe $u_i \in K_i$ de T_i. En déduire, grâce à la caractérisation de la projection, que u_i vérifie:

$$(-J_i A u_i + J_i f | u_i - v_i)_i \geq 0, \quad \forall v_i \in K_i.$$

Etablir alors que pour tout $f \in V'$, il existe $u_i \in K_i$ avec:

$$\langle f - A u_i, u_i - v_i \rangle \geq 0, \quad \forall v_i \in K_i.$$

1.4. Montrer que l'on peut extraire une sous-suite $\{u_k\}$ de la suite $\{u_i\}$ avec $u_k \rightharpoonup u$ dans V et $Au_k \rightharpoonup \alpha$ dans V'. Vérifier que $u \in K$, puis utiliser la monotonie pour avoir:

$$\liminf_{k\to\infty} \langle A u_k, u_k \rangle - \langle \alpha, u \rangle \geq 0.$$

Utiliser la question **1.3** pour obtenir pour $v \in K_i$ et $k \geq i$:

$$\langle f - A u_k, u_k - v \rangle \geq 0,$$

d'où

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A u_k, u_k \rangle \leq \langle f, u - v \rangle + \langle \alpha, v \rangle.$$

Obtenir enfin par densité:

$$\limsup_{k\to\infty} \langle A u_k, u_k \rangle \leq \langle \alpha, u \rangle.$$

1.5. Montrer que:

$$\langle A u_k, u_k \rangle \to \langle \alpha, u \rangle$$

puis par monotonie

$$\langle \alpha - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in V$$

donc $\alpha = Au$, comme dans la question **1.1**. Reprendre encore la question **1.3** pour avoir, pour tout $v_i \in K_i$

$$\langle Au - f, v_i - u \rangle \geq 0$$

et établir finalement que $\forall f \in V', \exists u \in K$

$$\langle Au - f, v - u \rangle \geq 0, \quad \forall v \in K.$$

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert et B un opérateur auto-adjoint compact sur H vérifiant:

$$(\S) \qquad (Bu^* | u^*) > 0, \text{ en un point } u^* \in H.$$

Soient $F(u) = (Bu|u)$, $G(u) = \|u\|^2 = (u|u)$ et $S = \{u : G(u) = 1\}$. On considère le problème:

$$(P) \qquad \max_{u \in S} F(u).$$

2.1. Soit $\{u_n\}$ une suite maximisante pour (P). Montrer qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ et $u_0 \in H$ tels que:

(i) $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$,

(ii) $Bu_{n_k} \to Bu_0$,

(iii) $F(u_{n_k}) \to F(u_0)$.

Etablir que $u_0 \neq 0$ par (§), puis que $\|u_0\| \leq 1$ et enfin que $\|u_0\| = 1$ par homogénéité . Donc u_0 est solution de (P) et la valeur de (P) est $\mu = (Bu_0|u_0)$.

2.2. En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $DF(u_0) = \lambda DG(u_0)$. Montrer que λ est une valeur propre de B, que c'est la plus grande et que $\mu = \lambda$.

Partie B

Exercice 3. Dans cet exercice on s'interesse au problème suivant : trouver $u \in C^2([0,1])$ tel que

$$\forall x \in]0,1[,\ u(x) > 0, \tag{1}$$

$$\forall x \in [0,1],\ -u''(x) + u(x) = \sqrt{u(x)}, \tag{2}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{3}$$

Soit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall s \in [0,+\infty[,\ G(s) = \frac{2}{3}s^{3/2}, \tag{4}$$

$$\forall s \in]-\infty,0[,\ G(s) = 0. \tag{5}$$

Soit $J : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u'^2(x) + u^2(x))dx - \int_0^1 G(u(x))dx. \tag{6}$$

3.1. Vérifier que G est de classe C^1.

3.2. Expliquer pourquoi J est de classe C^1 et donner, pour $u \in H_0^1(]0,1[)$ et $v \in H_0^1(]0,1[)$, $J'(u)v$.

3.3. Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$. Montrer que $J'(u) = 0$ si et seulement si $u \in C^2([0,1])$ et

$$\forall x \in [0,1],\ -u''(x) + u(x) = \sqrt{\max\{u(x),0\}}. \tag{7}$$

3.4. Vérifier que J n'est pas convexe. (Indication : pour u et v dans $H_0^1(]0,1[)$, on pourra comparer $J(\varepsilon(u+v)/2)$ et $(J(\varepsilon u)/2) + (J(\varepsilon v)/2)$ quand $\varepsilon \to 0^+$.)

3.5. Montrer l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ J(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(]0,1[)} - C\|u\|^{3/2}_{H^1(]0,1[)}. \tag{8}$$

3.6. Soit

$$m = \inf_{u \in H_0^1(]0,1[)} J(u). \tag{9}$$

Montrer que

$$m > -\infty \tag{10}$$

et qu'il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$J(u) = m. \tag{11}$$

3.7. Montrer que $m < 0$.

3.8. Soit $u \in C^2([0,1]) \cap H_0^1(]0,1[)$ tel que (7) soit satisfait.

3.8.1. Montrer que

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) \geqslant 0. \tag{12}$$

(Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer la dérivée seconde de u en un point de $[0,1]$ où u atteint son minimum.)

3.8.2. Montrer que, s'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $u(x_0) = 0$ et $u'(x_0) = 0$, alors u est identiquement nulle. (Indication : on pourra considérer u comme la solution d'un problème de Cauchy associé à l'équation différentielle du second ordre (7).)

3.8.3. Déduire de ce qui précède que, si u n'est pas identiquement nulle, alors on a (1).

3.9. Montrer qu'il existe $u \in C^2([0,1])$ vérifiant (1), (2) et (3).

Exercice 4. On rappelle que $H_0^2(]0,1[) = \{u \in H^2(]0,1[);\, u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H^2(]0,1[)$. Soit $F : H_0^2(]0,1[) \to \mathbb{R}$ et $J : H_0^2(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall u \in H_0^2(]0,1[),\ F(u) = \int_0^1 (u''(x))^2 dx \text{ et } J(u) = \int_0^1 (u'(x))^2 dx - 1. \tag{13}$$

4.1. Montrer l'existence de $C > 0$ tel que

$$\forall u \in H_0^2(]0,1[),\ \|u\|_{H^2(]0,1[)} \leqslant C \|u''\|_{L^2(]0,1[)}. \tag{14}$$

4.2. Montrer l'existence de $u \in H_0^2(]0,1[)$ tel que

$$J(u) = 0, \tag{15}$$

$$\text{pour tout } v \in H_0^2(]0,1[) \text{ tel que } J(v) = 0,\ F(u) \leqslant F(v). \tag{16}$$

4.3. Dans cette question on suppose que u appartient à $H_0^2(]0,1[)$ et vérifie à la fois (15) et (16). Montrer que $J'(u) \neq 0$. Montrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall v \in H_0^2(]0,1[),\ \int_0^1 u''(x)v''(x)dx = \lambda \int_0^1 u'(x)v'(x)dx. \tag{17}$$

En déduire que

$$u \in H^4(]0,1[), \tag{18}$$

$$u^{(4)} = -\lambda u''. \tag{19}$$

Montrer que $\lambda > 0$.