TD 1. Espaces métriques

Exercice 1 (Distance discrète). Soit X un ensemble non vide. On pose pour tout x et $y \in X$, $d(x,y) = 0$ si $x = y$, et $d(x,y) = 1$ sinon.

1. Montrer que (X,d) est un espace métrique (on dit que X est muni de la distance discrète). Quels sont les ouverts et les fermés de X ?
2. Quelle est la boule ouverte centrée en $x_0 \in X$ et de rayon 1 ? la boule fermée ? l'adhérence de la boule ouverte ?
3. Quelles sont les suites convergentes ? Est-ce un espace complet ?
4. Quelles sont les parties compactes de X ?

Exercice 2 (Vrai ou faux ?). Dans la suite, A et B sont deux parties d'un espace métrique (X,d). Déterminer, à l'appui d'une preuve ou d'un contre-exemple, si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles décrivent une égalité fausse, indiquez si au moins l'une des inclusions est vraie.

1. $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.
2. $\partial \overline{A} = \partial A$.
3. $\partial \operatorname{int} A = \partial A$.
4. Pour qu'une partie A de (X,d) rencontre toutes les parties denses, il faut et il suffit qu'elle soit d'intérieur non vide.
5. Soit $X = P([0,1];\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes $p : [0,1] \to \mathbb{R}$. Il existe une norme sur X telle que l'espace $(X, \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 3 (Distance à un ensemble). Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soit E un ensemble non vide de X. On pose pour tout x de X :

$$d_E(x) = \text{dist }(x,E) = \inf\{d(x,y) : y \in E\}.$$

   Montrer que d_E est 1-lipschitzienne.
2. Soient F_1 et F_2 des fermés non vides disjoints. Montrer qu'il existe des ouverts *disjoints* O_1 et O_2 tel que $O_i \supset F_i$, $i = 1,2$.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique. On considère $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de X, et x dans X. On suppose que la suite admet x comme valeur d'adhérence : montrer que toute la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. En déduire qu'une suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.

Exercice 5 (Equivalences de distances). Soient X un ensemble et d_1, d_2 deux distances sur X.

1. On suppose que les deux distances sont fortement équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $b > a > 0$ telles que $ad_1 < d_2 < bd_1$. Montrer qu'elles sont alors équivalentes (elles ont les mêmes ouverts) et que toute suite de Cauchy de (X, d_1) est aussi une suite de Cauchy de (X, d_2).
2. On suppose que les distances sont simplement équivalentes (mêmes ouverts). Montrer par un contre-exemple qu'une suite de Cauchy pour d_2 n'est pas forcément une suite de Cauchy pour d_1 ; en particulier, il se peut que (X, d_1) soit complet et que (X, d_2) ne le soit pas. *(On pourra considérer $\mathbb{R}$, avec d_1 la distance usuelle et $d_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$).*

Exercice 6 (Un théorème de Poincaré). Soit (K, d_0) un espace métrique compact et Y un espace métrique.

1. Soit $\varphi : K \to Y$ une application bijective continue. Montrer que φ est un homéomorphisme.
2. Lorsque (Z, d) est un espace métrique, on désigne par $\mathcal{O}_d$ l'ensemble des ouverts de la topologie définie par d. Soit d_1 une distance sur K telle que (K, d_1) est compact et $\mathcal{O}_{d_1} \supset \mathcal{O}_{d_0}$. Montrer que $\mathcal{O}_{d_1} = \mathcal{O}_{d_0}$.

Commenter ce résultat au regard du problème

$$\inf\{f(x) : x \in K\}$$

où $f : K \to \mathbb{R}$ est une fonction dont la régularité fait partie de la discussion.

Exercice 7 (Le théorème du retour/Principe de récurrence de Poincaré). Soit B une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi : B \to B$ un homéomorphisme qui conserve la mesure de Lebesgue, *i.e* si E est un sous-ensemble mesurable de B, $\mu(\varphi(E)) = \mu(E)$ (où μ désigne la mesure de Lebesgue). On souhaite étudier le comportement des suites du type

$$x_k = \varphi^k(x_0),$$

où x_0 est arbitraire dans B.

On dit que x est un point quasi-récurrent si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $k \geq 1$ tel que

$$\|\varphi^k(x) - x\| < \epsilon.$$

Pour $\epsilon > 0$ fixé, on dit qu'un point est ϵ-récurrent s'il existe $k \geq 1$ tel que

$$\|\varphi^k(x) - x\| < \epsilon.$$

1. Montrer que pour toute boule fermée $\overline{B}(x, r) \subset B$, il existe des entiers $k_1 > k_0 \geq 1$ tels que
$$\varphi^{k_1}(\overline{B}(x, r)) \cap \varphi^{k_0}(\overline{B}(x, r)) \neq \emptyset.$$
2. Montrer que l'ensemble des points ϵ-récurrents est un ouvert dense.
3. En déduire que l'ensemble des points quasi-récurrents est dense.

Exercice 8 (**Normes L^p**). Pour $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(x)^2\,dx}$$
$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

1. Montrer que l'on obtient ainsi des normes sur $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ et qu'elle satisfont

$$\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty.$$

2. Montrer que ces normes ne sont pas deux à deux équivalentes.
3. Pour lesquelles de ces normes l'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ est-il complet ?

Exercice 9 (**Espaces de Hölder**). Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On considère sur l'espace $\mathcal{C}^\alpha(K;\mathbb{R})$ des fonctions höldériennes d'indice $\alpha \in]0,1]$, la norme

$$\|f\|_\alpha = \max_{x\in K} |f(x)| + \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\alpha} : (x,y)\in K^2, x\neq y\right\}.$$

1. Montrer que cette norme munit $\mathcal{C}^\alpha(K;\mathbb{R})$ d'une structure d'espace de Banach.
2. Démontrer que la boule unité de $\mathcal{C}^\alpha(K;\mathbb{R})$ est relativement compacte dans $(\mathcal{C}(K;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, *i.e.* son adhérence est compacte.
3. L'espace $\mathcal{C}^\alpha(K;\mathbb{R})$ est-il fermé dans $(\mathcal{C}(K;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$?