Mesure et intégrale de surface

Jean-François Babadjian
Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr

1 Géométrie différentielle

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la généralisation des courbes et des surfaces dans l'espace Euclidien qui conduit la notion de sous-variété différentielle de $\mathbb{R}^N$.

1.1 Quelques rappels de calcul différentiel

Nous rappelons les résultats suivants de calcul différentiel seront centraux dans les arguments qui suivent.

Théorème 1.1 (d'inversion locale). *Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose qu'il existe $x_0 \in U$ tel que $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$. Alors il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x_0 et un ouvert $W \subset \mathbb{R}^N$ contenant $\varphi(x_0)$ tels que φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de V sur W.*

Le théorème d'inversion locale ne donne qu'un critère permettant de montrer qu'une fonction est difféomorphisme local. Le théorème d'inversion global permet en revanche de montrer, sous des hypothèses plus fortes, qu'une fonction est un difféormorphisme global.

Théorème 1.2 (d'inversion globale). *Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). On suppose que φ est injective sur U et que $d\varphi(x) \in GL_N(\mathbb{R})$ pour tout $x \in U$. Alors $\varphi(U)$ est un ouvert et φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.*

Le théorème des fonctions implicites permet de résoudre localement une équation cartésienne $f(x, y) = 0$ sous la forme $y = y(x)$. Autrement dit, il permet (localement) de montrer qu'un ensemble de niveau peut s'écrire comme le graphe d'une fonction.

Si $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ et $(y_0, z_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, nous considérerons par la suite les différentielles partielles $d_y g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^m)$ et $d_z g(y_0, z_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m)$ de f en $x_0 = (y_0, z_0)$ qui correspondent, respectivement, aux différentielles des fonctions partielles $y \in \mathbb{R}^k \mapsto g(y, z)$ et $z \in \mathbb{R}^l \mapsto g(y, z)$. Si f est différentiable en (y_0, z_0), nous avons alors pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$,

$$dg(y_0, z_0)(h_1, h_2) = d_y g(y_0, z_0)(h_1) + d_z g(y_0, z_0)(h_2).$$

Théorème 1.3 (des fonctions implicites). *Soient $U \subset \mathbb{R}^k$ et $V \subset \mathbb{R}^l$ des ouverts et $g : U \times V \to \mathbb{R}^l$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $x_0 = (y_0, z_0) \in U \times V$ tel que*

$$\begin{cases} g(y_0, z_0) = 0, \\ d_z g(y_0, z_0) \in GL_l(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Alors, il existe un ouvert $U' \subset U$ contenant y_0, un ouvert $V' \subset V$ contenant z_0 et une fonction $a : U' \to V'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$\begin{cases}(y,z) \in U' \times V', \\ g(y,z) = 0\end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y \in U', \\ z = a(y).\end{cases}$$

1.2 Sous-variétés

Définition 1.4. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Un sous ensemble M de $\mathbb{R}^N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$ si, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

La définition précédente en terme de carte locale signifie que localement, M est $\mathcal{C}^p$-difféomorphe à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Dans le résultat suivant, nous donnons d'autres caractérisations dont les preuves reposent sur les Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Par la suite, nous identifierons $\mathbb{R}^N$ et $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ de sorte que tout point $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit $x = (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$.

Théorème 1.5. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) M est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^p$;

(ii) Fonction implicite : pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\};$$

(iii) Graphe : pour tout $x_0 = (y_0, z_0) \in M$, il existe un voisinage ouvert V de y_0 dans $\mathbb{R}^k$, un voisinage ouvert W de z_0 dans $\mathbb{R}^{N-k}$, une fonction $a : V \to W$ de classe $\mathcal{C}^p$ et $A \in GL_N(\mathbb{R})$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{A(y, a(y)) : \ y \in V\};$$

(iv) Nappe paramétrée : pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage ouvert V de $0_{\mathbb{R}^k}$ dans $\mathbb{R}^k$ et une fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $M \cap U$.

Remarque 1.6. 1) La caractérisation (ii) d'une sous-variété M en terme de fonction implicite signifie que, localement, M est l'ensemble de niveau 0 d'une fonction $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-k}$. Une fonction $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ contenant x_0 et telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective s'appelle une *submersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en x_0.

2) La caractérisation (iii) d'une sous-variété M en terme de graphe signifie que localement, M est le graphe d'une fonction $a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{N-k}$. La présence de l'application linéaire A est due au fait qu'il peut être nécessaire d'effectuer un changement de base afin de se ramener à une telle fonction. On pourrait se passer d'introduire ce changement de base mais il faudrait alors identifier $\mathbb{R}^N$ à $E \times F$ où E et F sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$ de dimenson k et $N-k$ respectivement. Dans nos notations, on a en fait que $E = A(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ et $F = A(\{0_{\mathbb{R}^k}\} \times \mathbb{R}^{N-k})$.

3) La caractérisation (iv) d'une sous-variété M en terme de nappe paramétrée signifie que, localement, M est l'image d'une fonction $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$. Une telle fonction $f : V \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert $V \subset \mathbb{R}^k$ contenant 0 telle que $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective s'appelle une *immersion* de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

Démonstration du Théorème 1.5. Carte locale $\Longrightarrow$ Fonction implicite : Soient $x_0 \in M$, U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

On définit $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ par

$$g(x) = (\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_N(x)) \quad \text{pour tout } x \in U.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^p$ et d'après le théorème de différentiation des fonctions composées, on a pour tout $x \in U$,

$$dg(x) = (d\varphi_{k+1}(x)(h), \dots, d\varphi_N(x)(h)) \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N.$$

Comme φ est un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme local au voisinage de x_0, on en déduit que $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$ et donc, pour tout $v \in \mathbb{R}^{N-k}$ il existe un unique $h \in \mathbb{R}^N$ tel que $d\varphi(x_0)(h) = (0_{\mathbb{R}^k}, v)$, ce qui montre que

$$dg(x_0)(h) = v$$

et donc que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective. On a donc montré que g est une submersion de classe $\mathcal{C}^p$ en x_0. Enfin,

$$\begin{aligned} x \in M \cap U \quad &\Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}] \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in U \text{ et } g(x) = 0. \end{aligned}$$

Fonction implicite $\Longrightarrow$ Graphe : Soient $x_0 \in M$, U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \; g(x) = 0\}.$$

Comme $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective on a $\mathrm{rg}(dg(x_0)) = N - k$ et le Théorème du rang montre que $E = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Soit $F = E^\perp$ le supplémentaire orthogonal à E dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$) de sorte que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$.

Dans la suite, nous identifierons $\mathbb{R}^N$ à $E \times F$ via l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^N = E \oplus F \quad &\to \quad E \times F, \\ x = y + z \quad &\mapsto \quad (y, z). \end{aligned}$$

Par abus de notation, nous écrirons tout $x \in \mathbb{R}^N$ sous la forme $x = (y, z) \in E \times F$. En particulier, on a $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$. Quitte à réduire U, nous pouvons supposer que $U = V \times W$ où V est un voisinage ouvert de y_0 dans E et W est un voisinage ouvert de z_0 dans F. Considérons l'application partielle

$$g(y_0, \cdot) : W \to \mathbb{R}^{N-k}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^p$. Sa différentielle en z_0 est donnée par $d_z g(y_0, z_0) = dg(x_0)|_F \in \mathscr{L}(F; \mathbb{R}^{N-k})$. Si $v \in F$ est tel que $d_z g(y_0, z_0)(v) = dg(x_0)(v) = 0$, alors $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0)) = E$ ce qui montre que $v = 0$. Par conséquent, $d_z g(y_0, z_0)$ est injective et donc bijective puisque $\dim(F) = \dim(\mathbb{R}^{N-k}) = N - k$. On en déduit que $d_z g(y_0, z_0) \in GL_{N-k}(\mathbb{R})$ de sorte que nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions implicites. Il existe donc un ouvert $V' \subset V$ contenant y_0, un ouvert $W' \subset W$ contenant z_0 et une fonction $a : V' \to W'$ de classe $\mathcal{C}^p$ tels que

$$\begin{cases} (y, z) \in V' \times W', \\ g(y, z) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y \in V', \\ z = a(y). \end{cases}$$

Par conséquent,
$$M \cap (V' \times W') = \{(y, a(y)) : \ y \in V'\}.$$

Graphe $\Longrightarrow$ Carte locale : Soient $x_0 = (y_0, z_0) \in M$, V un voisinage ouvert de y_0 dans $\mathbb{R}^k$, W un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{R}^{N-k}$, $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ et $A \in GL_N(\mathbb{R})$ tels que
$$M \cap (V \times W) = \{A(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$
Quitte à faire un changement de base, on peut supposer que $A = \mathrm{Id}$. Soit $\varphi : V \times W \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par
$$\varphi(x) = \varphi(y, z) = (y, z - a(y)) \quad \text{pour tout } x = (y, z) \in V \times W.$$
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $V \times W$. De plus φ est clairement bijective de $V \times W$ sur son image $\varphi(V \times W)$ d'inverse donné par
$$\varphi^{-1}(y', z') = (y', z' + a(y')) \quad \text{pour tout } (y', z') \in \varphi(V \times W).$$
Par ailleurs, pour tout $x = (y, z) \in V \times W$ et tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, on a
$$d\varphi(x)(h) = (h_1, h_2 - da(y)(h_1)),$$
de sorte que $d\varphi(x) \in GL_N(\mathbb{R})$ avec $[d\varphi(x)]^{-1}(v) = (v_1, v_2 + da(z)(v_1))$ pour tout $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. Le Théorème d'inversion globale montre que φ réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de $V \times W$ sur son image (qui est ouverte).

Enfin, comme
$$x = (y, z) \in M \cap (V \times W) \quad \Longleftrightarrow \quad (y, z) \in V \times W \text{ et } z = a(y),$$
on en déduit que
$$\varphi(x) \in \varphi(M \cap (V \times W)) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \in \varphi(V \times W) \text{ et } \varphi_{k+1}(x) = \cdots = \varphi_N(x) = 0,$$
ce qui montre que
$$\varphi(M \cap (V \times W)) = \varphi(V \times W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Graphe $\Longrightarrow$ Nappe paramétrée : On suppose de nouveau que $A = \mathrm{Id}$. On pose $U = V \times W$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et
$$V' = \{y \in \mathbb{R}^k : \ (y_0 + y, a(y_0 + y)) \in U\}$$
qui est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ (comme image réciproque de l'ouvert U par la fonction continue $y \mapsto (y_0 + y, a(y_0 + y)))$ qui contient $0_{\mathbb{R}^k}$ puisque $(y_0, a(y_0)) = (y_0, z_0) = x_0 \in U$. On définit
$$\begin{array}{rcl} f : V' & \to & \mathbb{R}^N \\ y & \mapsto & (y_0 + y, a(y_0 + y)) \end{array}$$
qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur V'. De plus $f(0) = (y_0, a(y_0)) = (y_0, z_0) = x_0$ et $df(0)(h) = (h, da(y_0)(h))$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$. Par conséquent, $df(0)(h) = 0$ implique que $h = 0$, ce qui montre que $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective et donc que f est une immersion de classe $\mathcal{C}^p$ en 0.

Montrons que $f : V' \to M \cap U$ est bijective. Tout d'abord, si y_1 et $y_2 \in V'$ sont tels que $f(y_1) = f(y_2)$, on en déduit que $(y_0 + y_1, a(y_0 + y_1)) = (y_0 + y_2, a(y_0 + y_2))$ ce qui montre que $y_1 = y_2$ et donc que a est injective sur V'. Par ailleurs, pour tout $x = (y, z) \in M \cap U$, on a $z = a(y)$, donc en posant $\bar{y} := y - y_0$, on a $f(\bar{y}) = (y_0 + \bar{y}, a(y_0 + \bar{y})) = (y, z) = x \in U$ ce qui implique que

$\bar{y} \in V'$ et $f(\bar{y}) = x$. Ceci implique que f est surjective de V' sur $M \cap U$ et donc que f réalise une bijection de V' sur $M \cap U$. Remarquons que l'application réciproque $f^{-1} : M \cap U \to V$ est donnée par

$$f^{-1}(x) = ((x - x_0)_1, \ldots, (x - x_0)_k) \quad \text{pour tout } x \in M \cap U \tag{1.1}$$

qui définit bien une fonction continue sur $M \cap U$. Nous avons finalement montré que $f : V' \to M \cap U$ est un homéomorphisme.

Nappe paramétrée $\Longrightarrow$ Graphe : Soit $x_0 \in M$, U un voisignage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, V un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^k}$ dans $\mathbb{R}^k$ et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $U \cap M$.

Comme $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective, $E := \mathrm{Im}(df(0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Soit $F = E^\perp$ le supplémentaire orthogonal à E dans $\mathbb{R}^N$ (qui est un sous espace vectoriel de dimension $N - k$) de sorte que $\mathbb{R}^N = E \oplus F$. De nouveau, nous identifions $\mathbb{R}^N$ à $E \times F$ et nous écrirons $x = (y, z) \in E \times F$. En particulier, on a $x_0 = (y_0, z_0) \in E \times F$. On note $P_E : \mathbb{R}^N \to E$ (resp. $P_F : \mathbb{R}^N \to F$) la projection sur E (resp. F) et on définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} J : V & \to & E \\ y & \mapsto & P_E(f(y)). \end{array}$$

La fonction J est de classe $\mathcal{C}^p$ sur V et on a $dJ(0)(h) = P_E \circ df(0)(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^k$. De plus si $dJ(0)(h) = 0$ on en déduit que $df(0)(h) \in \mathrm{Ker}(P_E) = E^\perp = \mathrm{Im}(df(0))^\perp$ ce qui implique que $df(0)(h) = 0$, soit $h = 0$ puisque $df(0)$ est injective. On en déduit que $dJ(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; E)$ est injective puis, comme $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}^k) = k$, que $dJ(0) \in GL_k(\mathbb{R})$. D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $V_0 \subset V$ de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et un voisinage ouvert V_{y_0} de y_0 dans E tels que J réalise un $\mathcal{C}^p$-difféomorphisme de V_0 sur V_{y_0}.

Soit $\tilde{U} = f(V_0)$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ puisque V_0 est ouvert dans $\mathbb{R}^k$ et $f^{-1} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ est continue d'après (1.1). Alors

$$\begin{array}{rcl} x = (y, z) \in M \cap \tilde{U} & \Longleftrightarrow & \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } x = f(y') \\ & \Longleftrightarrow & \text{il existe } y' \in V_0 \text{ tel que } y = J(y') \text{ et } z = P_F(f(y')) \\ & \Longleftrightarrow & y \in V_{y_0},\ y' = J^{-1}(y) \text{ et } z = P_F(f(y')) \\ & \Longleftrightarrow & y \in V_{y_0} \text{ et } z = P_F(f(J^{-1}(y))). \end{array}$$

Soit $a : V_{y_0} \to F$ la fonction définie par $a(y) = P_F \circ f \circ J^{-1}(y)$ pour tout $y \in V_{y_0}$ qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^p$. On a bien montré que $M \cap \tilde{U} = \{(y, a(y)) : y \in V_{y_0}\}$. □

Exemple 1.7. 1) Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert. Alors $M = V \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Il suffit de choisir pour tout $x_0 \in M$ l'ouvert $U = V \times B_{\mathbb{R}^{N-k}}(0, r)$ (avec $r > 0$ arbitraire) et $\varphi = \mathrm{id}$.

2) La sphère $\mathbb{S}^{N-1} = \{(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1^2 + \cdots + x_N^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N - 1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^N x_j^2 - 1 \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$dg(x)(h) = 2x \cdot h \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}^N,$$

ce qui montre que $dg(x)$ est surjective pour tout $x \in \mathbb{S}^{N-1}$. De plus $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : g(x) = 0\}$.

1.3 Espace tangent

La notion d'espace tangent pour les sous-variétés généralise celle de droite tangente pour les courbes.

Définition 1.8. Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à M en x_0, noté $T_{x_0}M$, est défini par

$$T_{x_0}M := \Big\{ v \in \mathbb{R}^N : \text{ il existe un intervalle ouvert } I \text{ contenant } 0 \text{ et } \gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \gamma(I) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v \Big\}.$$

Nous allons voir que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k.

Théorème 1.9. *Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension k et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'espace tangent à M en x_0 est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. De plus, on a les caractérisations suivantes :*
(i) Carte locale : $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ *;*
(ii) Nappe paramétrée : $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.
(iii) Graphe : $T_{x_0}M = \{A(h, da(x_0)(h)) : h \in \mathbb{R}^k\}$ *;*
(iv) Fonction implicite : $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$.

Démonstration. Fixons un point $x_0 \in U$.
(i) Carte locale : Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $\varphi : U \to \mathbb{R}^N$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image tels que

$$\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}].$$

Montrons tout d'abord que $T_{x_0}M \subset d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$. Soit $v \in T_{x_0}M$, alors il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une application $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(I) \subset U$. On peut alors définir $\tilde{\gamma}(t) = \varphi(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ de sorte que $\tilde{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Comme $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in I$, alors $\tilde{\gamma}(t) \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ et donc $\tilde{\gamma}'(0) = d\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = d\varphi(x_0)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. On en déduit que $v \in d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$.
Pour montrer l'autre inclusion, fixons un élément $w \in \mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}$. Comme $\varphi(U)$ est ouvert contenant $\varphi(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U)$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rccl} \gamma : &]-\varepsilon, \varepsilon[& \to & \mathbb{R}^N \\ & t & \mapsto & \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $\varphi(M \cap U) = \varphi(U) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}]$, on en déduit que $\gamma(t) \in M \cap U$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus $\gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on doit avoir que $\gamma'(0) = d(\varphi^{-1})(\varphi(x_0))(w) = d\varphi(x_0)^{-1}(w) \in T_{x_0}M$. On a donc bien établi que $d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\}) \subset T_{x_0}M$.
Comme $T_{x_0}M = d\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0_{\mathbb{R}^{N-k}}\})$ et $d\varphi(x_0) \in GL_N(\mathbb{R})$, on en déduit que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k.

(ii) Nappe paramétrée : Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$, V un voisinage ouvert de $0_{\mathbb{R}^k}$ dans $\mathbb{R}^k$ et $f : V \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = x_0$, $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k;\mathbb{R}^N)$ est injective et f réalise un homéomorphisme de V sur $M \cap U$.

Soit $w \in \mathbb{R}^k$, comme V est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ contenant 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $tw \in V$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[& \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & f(tw). \end{array}$$

Comme $f(V) = M \cap U$, on en déduit que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. De plus, la fonction γ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait $\gamma(0) = f(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $\gamma'(0) = df(0)(w) \in T_{x_0}M$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(df(0)) \subset T_{x_0}M$. Comme $df(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N)$ est injective, $\mathrm{Im}(df(0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k. Comme $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, on en déduit que $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0))$.

(iii) Graphe : Soit V un voisinage ouvert de y_0 dans $\mathbb{R}^k$, W un voisinage ouvert de z_0 dans $\mathbb{R}^{N-k}$, $a : V \to W$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $A \in GL_N(\mathbb{R})$ tels que

$$M \cap (V \times W) = \{A(y, a(y)) : \ y \in V\}.$$

Comme les fonctions f, a et A sont reliées par la relation

$$f(y) = A(y_0 + y, a(y_0 + y)) \quad \text{pour tout } y \in V,$$

on en déduit que

$$T_{x_0}M = \mathrm{Im}(df(0)) = \{df(0)(h) : \ h \in \mathbb{R}^k\} = \{A(h, da(x_0)(h)) : \ h \in \mathbb{R}^k\}.$$

(iv) Fonction implicite : Soit U un voisinage ouvert de x_0 dans $\mathbb{R}^N$ et $g : U \to \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ est surjective et

$$M \cap U = \{x \in U : \ g(x) = 0\}.$$

Soit $v \in T_{x_0}M$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $\gamma : I \to M$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à réduire l'intervalle I, on peut supposer que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in I$. Par conséquent, $g(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$, puis en dérivant, il vient

$$dg(\gamma(t))(\gamma'(t)) = 0 \quad \text{pour tout } t \in I.$$

En particulier, pour $t = 0$, on a $dg(x_0)(v) = 0$ ce qui montre que $v \in \mathrm{Ker}(dg(x_0))$ et donc que $T_{x_0}M \subset \mathrm{Ker}(df(x_0))$. Par ailleurs, la surjectivité de $dg(x_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^{N-k})$ montre que $\mathrm{Ker}(dg(x_0))$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension k, tout comme $T_{x_0}M$. Par conséquent, $T_{x_0}M = \mathrm{Ker}(dg(x_0))$. $\square$

2 Mesures de Hausdorff

2.1 Définition et propriétés des mesures de Hausdorff

Définition 2.1. Soient $0 \leq s < \infty$ et $\delta > 0$. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2} \right)^s : \ I \subset \mathbb{N}, \, A \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \, \mathrm{diam}(A_i) \leq \delta \right\},$$

où

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}$$

et $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\,dx$ est la fonction Gamma d'Euler. On pose ensuite

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

On appelle $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff s-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^N$.

Remarque 2.2. (i) Le supremum définissant $\mathcal{H}^s(A)$ est en fait une limite que $\delta \to 0$ car si $\delta_1 \leq \delta_2$, alors $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$.

(ii) Si $s = k \in \mathbb{N}$, La constante de renormalisation ω_k coïncide avec le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$, i.e.

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\}).$$

(iii) Comme $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\overline{A})$, on peut supposer que les ensembles A_i sont fermés dans la définition de $\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

Théorème 2.3. *Pour tout $0 \leq s < \infty$, $\mathcal{H}^s$ est une mesure Borélienne.*

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{H}^s$ est une mesure extérieure. Si $A \subset B$, on a clairement que $\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \mathcal{H}^s_\delta(B)$ puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement $\{B_j^n\}_{j\in I}$ de A_n tel que $\mathrm{diam}(B_j^n) \leq \delta$ et

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_n) \geq \sum_{j\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_j^n)}{2}\right)^s - \frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

Comme $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{j,n} B_j^n$, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta\left(\bigcup_{n=0}^\infty A_n\right) \leq \sum_{n=0}^\infty \sum_{j\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(B_j^n)}{2}\right)^s \leq \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_n) + \delta \leq \sum_{n=0}^\infty \mathcal{H}^s(A_n) + \delta$$

et la sous-additivité suit par passage à la limite quand $\delta \to 0$.

Pour montrer que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\mathrm{dist}(A,B) > 0$. Soit $0 < \delta < \mathrm{dist}(A,B)/4$ et $\{C_k\}_{k\in I}$ une recouvrement de $A \cup B$ avec $\mathrm{diam}(C_k) \leq \delta$. Soient $\mathcal{A} := \{C_k : C_k \cap A \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{B} := \{C_k : C_k \cap B \neq \emptyset\}$ de sorte que $A \subset \bigcup_{C_k\in\mathcal{A}} C_k$, $B \subset \bigcup_{C_k\in\mathcal{B}} C_k$ et $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $C_i \in \mathcal{A}$ et $C_j \in \mathcal{B}$. Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_k)}{2}\right)^s \quad &\geq \quad \sum_{C_i\in\mathcal{A}} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_i)}{2}\right)^s + \sum_{C_j\in\mathcal{B}} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(C_j)}{2}\right)^s \\
&\geq \quad \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).
\end{aligned}$$

Par passage à l'infimum sur tous les recouvrements $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup B$ dans le membre de gauche, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B),$$

puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

L'autre inégalité est une conséquence immédiate de la sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{H}^s$. $\square$

Montrons à présent des propriétés basiques des mesures de Hausdorff.

Proposition 2.4. *(i) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^N$;*
(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$;
(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$;
(iv) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ pour toute isométrie affine $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$;
(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschitzienne, alors

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A) \quad \textit{pour tout } A \subset \mathbb{R}^N;$$

(vi) Si $t > s$ et $A \subset \mathbb{R}^N$, alors

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

Démonstration. (i) Si $\{a\}$ est un singleton, pour tout $\delta > 0$, on a $a \in B_{\delta/2}(a)$ de sorte que $\mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \leq \omega_0(\delta/2)^0 = 1$ et donc, en faisant tendre $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^0(\{a\}) \leq 1$. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $\{a\}$ par des ensembles de diamètre plus petit que δ, alors (en utilisant la convention $0^0 = 1$),

$$\omega_0 \sum_{i\in I} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^0 \geq 1.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements, il vient $\mathcal{H}^0(\{a\}) \geq \mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble fini, $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^0(\{a_i\}) = k = \#(A)$ et, si A est un ensemble infini $\mathcal{H}^0(A) = \infty = \#(A)$.

(ii) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble Borélien et $A \subset \bigcup_{i=0}^\infty]a_i, b_i[$, pour tout $\delta > 0$ on peut décomposer chacun des intervalles $[a_i, b_i]$ en une union finie de sous intervalles d'intérieurs disjoints et de diamètre plus petit que δ, i.e. $[a_i, b_i] = \bigcup_{j\in I_i} [\alpha_i^j, \beta_i^j]$ avec $\beta_i^j - \alpha_i^j \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \omega_1 \sum_{i=0}^\infty \sum_{j\in I_i} \frac{\mathrm{diam}([\alpha_i^j, \beta_i^j])}{2} = \sum_{i=0}^\infty (b_i - a_i),$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega_1 = 2$. Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{]a_i, b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient par définition de la mesure de Lebesgue que $\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$, puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$

Pour montrer l'autre inégalité, considérons un recouvrement de $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ avec $\mathrm{diam}(A_i) \leq \delta$, on pose $s_i = \inf A_i$ et $t_i = \sup A_i$ de sorte que $A_i \subset]s_i - \delta 2^{-(i+1)}, t_i + \delta 2^{-(i+1)}[$. Par définition de la mesure de Lebesgue, on a donc que

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \sum_{i\in I} (t_i - s_i) + 2\delta = \omega_1 \sum_{i\in I} \frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2} + 2\delta,$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, il vient

$$\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}^1_\delta(A) + \delta.$$

On fait tendre ensuite $\delta \to 0$.

(iii) Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\mathrm{diam}(A_i) \leq \delta$, alors $\{\lambda A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de λA avec $\mathrm{diam}(\lambda A_i) \leq \lambda\delta$, d'où

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \leq \lambda^s \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A,

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient $\mathcal{H}^s(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, on note simplement que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\lambda^{-1}(\lambda A)) \le \lambda^{-s} \mathcal{H}^s(\lambda A).$$

(iv) Si $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie affine et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{L(A_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $L(A)$ avec $\mathrm{diam}(L(A_i)) = \mathrm{diam}(A_i) \le \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_\delta(L(A)) \le \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(L(A_i))}{2}\right)^s = \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(L(A)) \le \mathcal{H}^s(A).$$

Comme $L^{-1} : L(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est une isométrie linéaire, il vient

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(L^{-1}(L(A))) \le \mathcal{H}^s(L(A)),$$

ce qui montre l'autre inégalité.

(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschtzienne et $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement de A avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{f(A_i)\}_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(A)$ avec $\mathrm{diam}(f(A_i)) \le \mathrm{Lip}(f)\mathrm{diam}(A_i) \le \mathrm{Lip}(f)\delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_{\mathrm{Lip}(f)\delta}(f(A)) \le \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(f(A_i))}{2}\right)^s \le [\mathrm{Lip}(f)]^s \sum_{i\in I} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in I}$ de A et passage au supremum en δ, on obtient

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le [\mathrm{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A).$$

(vi) est une conséquence du fait que, par définition de la mesure de Hausdorff, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \le \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s} \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$. $\square$

2.2 Mesures de Hausdorff versus mesure de Lebesgue

Nous allons à présent montrer que la la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^N$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$. La démonstration repose sur l'inégalité isodiamétrique qui stipule que le plus grand volume parmi tous les sous ensembles de diamètre $2r$ est $\omega_N r^N$, i.e. le volume de la boule. Remarquons que cette inégalité n'est pas complètement évidente car, comme le montre l'exemple d'un triangle équilatéral, il n'est pas vrai qu'un ensemble quelconque est contenu dans une boule de même diamètre.

Proposition 2.5 (**Inégalité isodiamétrique**)**.** *Pour tout ensemble $\mathcal{L}^N$-mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^N.$$

Démonstration. La preuve repose sur le principe de symétrisation de Steiner. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi| = 1$, on note Π_ξ l'hyperplan orthogonal à ξ et

$$A_y^\xi := \{t \in \mathbb{R} : \ y + t\xi \in B\}$$

la section de A dans la direction ξ passant par le point y. D'après le Théorème de Fubini, l'application $y \mapsto \mathcal{L}^1(A_y^\xi)$ est $\mathcal{L}^{N-1}$-mesurable dans Π_ξ. Par conséquent l'ensemble

$$S_\xi(A) := \{y + t\xi : \ y \in \Pi_\xi, \ |t| \leq \mathcal{L}^1(B_y^\xi)/2\}$$

est toujours $\mathcal{L}^N$-mesurable. De plus, une nouvelle utilisation du Théorème de Fubini montre que $\mathcal{L}^N(S_\xi(A)) = \mathcal{L}^N(A)$.

Par définition, le nouvel ensemble $S_\xi(A)$ est symétrique par rapport à Π_ξ. Par ailleurs, si A est symétrique par rapport à Π_ν avec $\nu \cdot \xi = 0$, alors $S_\xi(A)$ conserve cette propriété. Pour voir cela, notons σ la symétrie par rapport à Π_ν, i.e. $\sigma(x) = x - 2(x \cdot \nu)\nu$, qui satisfait $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Alors, on a que

$$\sigma(y + A_y^\xi \xi) = \sigma(y) + A_{\sigma(y)}^\xi \xi.$$

En effet, si $x \in \sigma(y + A_y^\xi \xi)$, alors il existe $t \in A_y^\xi$ tel que $x = \sigma(y + t\xi) = \sigma(y) + t\xi$ car $\xi \cdot \nu = 0$. Comme $y + t\xi \in A$ et $\sigma(A) = A$, on en déduit que $\sigma(y) + t\xi = x = \sigma(y + t\xi) \in A$, ce qui montre que $t \in A_{\sigma(y)}^\xi$ et donc que $x \in \sigma(y) + A_{\sigma(y)}^\xi \xi$. Pour montrer l'autre inclusion, on utilise l'inclusion précédente pour obtenir que

$$\sigma\left(\sigma(y) + A_{\sigma(y)}^\xi \xi\right) \subset \sigma^2(y) + A_{\sigma^2(y)}^\xi \xi = y + A_y^\xi \xi,$$

soit, en appliquant σ à l'inclusion précédente, $\sigma(y) + A_{\sigma(y)}^\xi \xi \subset \sigma(y + A_y^\xi \xi)$. Soit $x \in S_\xi(A)$, alors $x = y + t\xi$ avec $y \in \Pi_\xi$ et $|t| \leq \mathcal{L}^1(A_y^\xi)/2$. En utilisant la Proposition 2.4 (ii) et (iv), on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(A_y^\xi) = \mathcal{H}^1(A_y^\xi) = \mathcal{H}^1(y + A_y^\xi \xi) = \mathcal{H}^1(\sigma(y + A_y^\xi \xi))& \\ = \mathcal{H}^1(\sigma(y) + A_{\sigma(y)}^\xi \xi) = \mathcal{H}^1(A_{\sigma(y)}^\xi) = \mathcal{L}^1(A_{\sigma(y)}^\xi)&.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(x) = \sigma(y) + t\xi$ avec $\sigma(y) \in \Pi_\xi$ et $2|t| \leq \mathcal{L}^1(A_y^\xi) = \mathcal{L}^1(A_{\sigma(y)}^\xi)$, ce qui montre que $\sigma(x) \in S_\xi(A)$ et donc que $S_\xi(A)$ est symétrique par rapport à Π_ν.

Montrons à présent que la symétrisation diminue le diamètre. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère x et $x' \in A$ tels que

$$\operatorname{diam}(S_\xi(A)) \leq |x - x'| + \varepsilon.$$

Soient $y = x - (x \cdot \xi)\xi$ et $y' = x' - (x' \cdot \xi)\xi \in \Pi_\xi$ et posons

$$r := \inf\{t : \ y + t\xi \in A\}, \quad s := \sup\{t : \ y + t\xi \in A\},$$

et

$$r' := \inf\{t : \ y' + t\xi \in A\}, \quad s' := \sup\{t : \ y' + t\xi \in A\}.$$

Supposons, sans restreindre la généralité que $s' - r \geq s - r'$. Alors

$$s' - r \geq \frac{1}{2}(s' - r) + \frac{1}{2}(s - r') = \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(s' - r') \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A_y^\xi) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A_{y'}^\xi).$$

Comme $|x \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A_y^\xi)$ et $|x' \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A_{y'}^\xi)$, il vient

$$s' - r \geq |x \cdot \xi| + |x' \cdot \xi| \geq |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|.$$

Par conséquent, comme $y + r\xi$ et $y' + s'\xi \in \overline{A}$,

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam}(S_\xi(A)) - \varepsilon)^2 &\leq |x - x'|^2 = |y - y'|^2 + |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|^2 \\ &\leq |y - y'|^2 + (s' - r)^2 = |(y + r\xi) - (y' + s'\xi)|^2 \leq (\operatorname{diam}(\overline{A}))^2 = (\operatorname{diam}(A))^2,\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $\operatorname{diam}(S_\xi(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$.

Nous sommes à présent en mesure de montrer l'inégalité isodiamétrique. Si $\operatorname{diam}(A) = \infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. On définit $A_1 = S_{e_1}(A)$, $A_2 = S_{e_2}(A_1), \ldots, A_N = S_{e_N}(A_{N-1})$ et on pose $A^* = A_N$. Par construction, $\mathcal{L}^N(A^*) = \mathcal{L}^N(A)$, $\operatorname{diam}(A^*) \leq \operatorname{diam}(A)$ et A^* est symétrique par rapport à Π_{e_k} pour tout $k = 1, \ldots, N$. Par conséquent, si $x \in A^*$, alors $-x \in A^*$ de sorte que $A^* \subset B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)$, soit

$$\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A^*) \leq \mathcal{L}^N(B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)) = \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2}\right)^N \leq \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^N,$$

ce qui conclut la preuve de l'inégalité. □

L'inégalité isodiamétrique permet montrer que la mesure de Hausdorff N-dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$, généralisant ainsi la Proposition 2.4 (ii).

Théorème 2.6. *$\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathcal{H}^N(A) < \infty$. Pour tout $\delta > 0$ il existe un recouvrement $\{A_i\}_{i \in I}$ tel que $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$ et

$$\omega_N \sum_{i \in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \leq \mathcal{H}_\delta^N(A) + \delta \leq \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

Rappelons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer que les A_i sont fermés. Comme $A \subset \bigcup_i A_i$, on obtient grâce à l'inégalité isodiamétrique que

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \sum_{i \in I} \mathcal{L}^N(A_i) \leq \omega_N \sum_{i \in I} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^N \leq \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

On obtient que $\mathcal{L}^N(A) \leq \mathcal{H}^N(A)$ par passage à la limite quand $\delta \to 0$. Si $\mathcal{H}^N(A) = \infty$, cette inégalité est immédiate.

Pour montrer l'autre inégalité, on commence par établir que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon. Pour ce faire, on remarque que si Q est un cube de $\mathbb{R}^N$, alors $\operatorname{diam}(Q) = \sqrt{N}\mathcal{L}^N(Q)^{1/N}$. Soit donc $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement de A par des cubes ouverts. Si $\delta > 0$, quitte à subdiviser chaque cubes Q_i en plus petits cubes, on peut supposer que $\operatorname{diam}(Q_i) \leq \delta$. Par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}_\delta^N(A) \leq \omega_N \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_i)}{2}\right)^N = \omega_N \left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right)^N \sum_{i=0}^\infty \mathcal{L}^N(Q_i).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de A et par passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \leq C_N \mathcal{L}^N(A)$, ce qui montre effectivement que $\mathcal{H}^N$ est finie sur les compacts et donc que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\mathcal{L}^N(A) < \infty$. Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue, pour tout $\delta > 0$, il existe un ouvert U contenant A tel que $\mathcal{L}^N(U) \leq \mathcal{L}^N(A) + \delta < \infty$. D'après le Théorème de presque-recouvrement de Vitali, il existe une famille dénombrable $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de boules ouvertes deux à deux disjointes, telle que $\operatorname{diam}(B_k) \leq \delta$ et $B_k \subset U$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) = 0.$$

Comme $\mathcal{H}^N_\delta$ est une mesure extérieure, il vient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^N_\delta(A) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^N_\delta(B_k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(B_k)}{2}\right)^N \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^N(B_k) = \mathcal{L}^N\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \leq \mathcal{L}^N(U) \leq \mathcal{L}^N(A) + \delta.\end{aligned}$$

et passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient que $\mathcal{H}^N(A) \leq \mathcal{L}^N(A)$. Cette inégalité reste évidemment vraie quand $\mathcal{L}^N(A) = \infty$. □

2.3 Formule de l'aire

Nous nous intéressons à présent à l'interprétation de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq N - 1$. La formule de l'aire va nous permettre de montrer que $\mathcal{H}^k$ coïncide avec la mesure de volume sur les sous-variétés de dimension k dans $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.7 (Formule de l'aire). *Soient $1 \leq k \leq N$, $U \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^N$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $x \in U \mapsto df(x)$ est bornée et, pour tout $x \in U$, $df(x)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$. Alors pour tout ensemble Borélien $A \subset U$, on a*

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A \sqrt{\det\left(df(x)^T df(x)\right)}\, dx.$$

Démonstration. **Etape 1.** Commençons par établir que $f(A)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il existe une suite de compacts $K_i \subset A$ telle que $\mathcal{L}^k(A \setminus K_i) \to 0$. Par conséquent, f étant Lipschitzienne, il vient

$$\mathcal{H}^k\left(f(A) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f(K_i)\right) \leq \mathcal{H}^k\left(f\left(A \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right)\right) \leq [\operatorname{Lip}(f)]^k \mathcal{L}^k\left(A \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) = 0.$$

Comme f est continue et K_i compact, $f(K_i) \subset \mathbb{R}^N$ est compact et $\bigcup_i f(K_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $f(A)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable comme union d'un ensemble Borélien et d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle.

Etape 2. Supposons d'abord que $f = L$ est une application linéaire injective. On utilise la décomposition polaire pour décomposer $L = O \circ S$ où $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est une application linéaire inversible, symétrique, définie positive et $O : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application orthogonale. En effet, l'application linéaire $L^T L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est inversible (car injective), symétrique et définie positive. Par le théorème de décomposition spectrale, il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_k\}$

de $\mathbb{R}^k$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ tels que $(L^T L)e_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$, de sorte que $L^T L = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \otimes e_i$. On pose alors

$$S := \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes e_i$$

qui définit une application linéaire $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ inversible, symétrique et définie positive. Posons alors $O := L \circ S^{-1}$ et $v_i := O(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} L(e_i) \in \mathbb{R}^N$. Par construction, $\{v_1, \dots, v_k\}$ forme un système orthonormé de $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que O est orthogonale.

On définit la mesure de Radon positive $\nu(E) := \mathcal{H}^k(L(E))$ pour tout Borélien $E \subset \mathbb{R}^k$. Si $x \in \mathbb{R}^k$, on a par linéarité de L et invariance par translation de $\mathcal{H}^k$ que

$$\nu(x + E) = \mathcal{H}^k(L(x + E)) = \mathcal{H}^k(L(x) + L(E)) = \mathcal{H}^k(L(E)) = \nu(E).$$

Par conséquent, la mesure de Radon $\lambda := \nu/\nu([0,1]^k)$ est invariante par translation et satisfait $\lambda([0,1]^k) = 1$. Par unicité de la mesure de Lebesgue, on a donc que $\lambda = \mathcal{L}^k$, soit $\nu = \kappa \mathcal{L}^k$ où $\kappa = \nu([0,1]^k)$.

Montrons à présent que $\kappa = \sqrt{\det(L^T L)}$. En utilisant la décomposition polaire et le fait que O est orthogonale (en particulier une isométrie),

$$\kappa = \frac{\mathcal{H}^k(O \circ S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{H}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{L}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)}$$

car $S(E) \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$ sur $\mathbb{R}^k$. En choisissant en particulier

$$E = Q = \{x \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq x \cdot e_i \leq 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

(le cube unité de $\mathbb{R}^k$ orienté suivant la base $\{e_1, \dots, e_k\}$), on a que

$$S(Q) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ 0 \leq y \cdot e_i \leq \sqrt{\lambda_i} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}$$

et donc $\mathcal{L}^k(S(Q)) = \prod_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} = \det(S) = \sqrt{\det(L^T L)}$ ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire dans le cas linéaire.

Etape 3. Considérons enfin le cas général d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $x \in U \mapsto df(x)$ est bornée et $df(x)$ est injective pour tout $x \in U$. Pour simplifier les notations, on pose $J_f := \sqrt{\det(df^T df)}$. Soit K un compact inclu dans U. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si x, y et $z \in K$ satisfont $|x - y| \leq \delta$ et $|x - z| \leq \delta$, alors

$$|J_f(x) - J_f(y)| \leq \varepsilon, \quad \|f(x) - f(y) - df(z)(y - x)\| \leq \varepsilon \|df(z)(x - y)\|.$$

En effet, la première condition résulte de l'uniforme continuité de J_f sur le compact K. La deuxième condition se démontre par l'absurde sur supposant l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans K telles que

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}, \quad \|x_n - z_n\| \leq \frac{1}{n}$$

et

$$o(\|x_n - y_n\|) = \|f(x_n) - f(y_n) - df(z_n)(x_n - y_n)\| > \varepsilon_0 \|df(z_n)(y_n - x_n)\|.$$

Quitte à extraire une sous-suite (car K est compact), on peut supposer que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ (avec $x = y = z$) et $v_n = (x_n - y_n)/\|x_n - y_n\| \to v$ avec $|v| = 1$. D'ou $o(1) > \varepsilon_0 \|df(z_n)(v_n)\|$ puis par passage à la limite $0 = \varepsilon_0 \|df(x)(v)\|$. Par conséquent, $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ appartient au noyau de $df(x)$, ce qui est impossible par injectivite de $df(x)$.

En particulier, pour $\varepsilon < 1$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \geq \|df(z)(x-y)\| - \|f(x) - f(y) - df(z)(y-x)\| \geq (1-\varepsilon)\|df(z)(y-x)\|$$

et

$$\|f(x) - f(x)\| \leq \|df(z)(x-y)\| + \|f(x) - f(y) - df(z)(y-x)\| \leq (1+\varepsilon)\|df(z)(y-x)\|.$$

Soit $K = \bigcup_{i=1}^m A_i$ une partition Borélienne de K telle que $\operatorname{diam}(A_i) \leq \delta$. On fixe $z_i \in A_i$ et on pose $L_i := df(z_i)$. Par hypothèse $L_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective et pour tout $x, y \in A_i$,

$$(1-\varepsilon)\|L_i(x-y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq (1+\varepsilon)\|L_i(x-y)\|,$$

ce qui montre que

$$\operatorname{Lip}_{L_i(A_i)}(f|_{A_i} \circ L_i^{-1}) \leq 1 + \varepsilon, \quad \operatorname{Lip}_{f(A_i)}(L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

En utilisant le fait que f est injective, on en déduit que $f(A \cap K) = \bigcup_{i=1}^m f(A \cap A_i)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f(A \cap K)) &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(A \cap A_i)) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((f \circ L_i^{-1})(L_i(A \cap A_i))) \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(A \cap A_i)) = (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{A \cap A_i} J_f(z_i)\, dx \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{A \cap A_i} J_f(x)\, dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K) \\
&= (1+\varepsilon)^k \int_{A \cap K} J_f(x)\, dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_{A \cap K} J_f(x)\, dx &= \sum_{i=1}^m \int_{A \cap A_i} J_f(x)\, dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{A \cap A_i} J_f(z_i)\, dx + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(A \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) f(A \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(A \cap A_i)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^k} \mathcal{H}^k(f(A \cap K)) + \varepsilon \mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^k(f(A \cap K)) = \int_{A \cap K} J_f(x)\, dx,$$

puis, en choisissant $K = K_n$ où $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts tels que $\bigcup_n K_n = U$ et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\mathcal{H}^k(f(A)) = \int_A J_f(x)\, dx,$$

ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire. $\square$

Remarque 2.8. (i) Si $k = 1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule du calcul de la longueur d'une courbe

$$\mathcal{H}^1(f(E)) = \int_E \|f'(t)\|\, dt.$$

(ii) Si $k = N-1$ et $f(x) = (x, a(x))$ où $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule de l'aire du graphe de a

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{(x, a(x)) :\ x \in E\}) = \int_E \sqrt{1 + \|\nabla a(x)\|^2}\, dx. \tag{2.1}$$

En effet, par caractérisation d'une sous-variété en terme de graphe, $G = \{(x, a(x)) :\ x \in \mathbb{R}^{N-1}\}$ est une hypersurface (sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $N-1$) de classe $\mathcal{C}^1$. On définit la fonction (de classe $\mathcal{C}^1$) $f : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^N$ par $f(x) = (x, a(x))$. La matrice jacobienne $Df(x) = (\partial_j f_i(x))_{1 \le i \le N, 1 \le j \le N-1}$ de f est donnée par

$$Df(x) = \begin{pmatrix} & \mathrm{Id}_{N-1} & \\ \partial_1 a(x) & \cdots & \partial_{N-1} a(x) \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Df(x)^T Df(x) &= \begin{pmatrix} & \partial_1 a(x) \\ \mathrm{Id}_{N-1} & \vdots \\ & \partial_{N-1} a(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \mathrm{Id}_{N-1} & \\ \partial_1 a(x) & \cdots & \partial_{N-1} a(x) \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{Id}_{N-1} + \nabla a(x) \otimes \nabla a(x). \end{aligned}$$

Soit $M = \mathrm{Id}_{N-1} + v \otimes v$ où $v \in \mathbb{R}^{N-1}$. Si $v \neq 0$, un calcul immédiat montre que $(\mathrm{Id} + v \otimes v)v = (1 + \|v\|^2)v$ ce qui montre que v est un vecteur propre de la matrice M et que la valeur propre associée est $1 + \|v\|^2$. Par ailleurs, si $e \in v^\perp$, alors $Me = e$, ce qui montre que e est un vecteur de M et que la valeur propre associée est 1. Par conséquent, $1 + \|v\|^2$ est une valeur propre simple et 1 est une valeur propre de multiplicité $N-2$ de la matrice M, ce qui implique $\det(1 + v \otimes v) = 1 + \|v\|^2$. Cette formule reste bien entendu vraie si $v = 0$. La formule (2.1) est alors une conséquence immédiate de la formule de l'aire.

3 Formule de Gauss-Green

3.1 Partition de l'unité régulière

On commence par montrer une généralisation du lemme d'Urysohn au cas de fonctions régulières.

Lemme 3.1. *Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $V \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tels que $K \subset V$. Alors, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \le f \le 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.*

Démonstration. Soit $d = \mathrm{dist}(K, \mathbb{R}^N \setminus V) > 0$, on pose

$$U = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \mathrm{dist}(x, K) < d/3\}, \quad U' = \{x \in \mathbb{R}^N :\ \mathrm{dist}(x, K) < 2d/3\}$$

de sorte que $K \subset U \subset\subset U' \subset\subset V$.

On considère une fonction $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\eta \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\eta) \subset \overline{B}_1$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(y)\,dy = 0$. On pose alors $\eta_\varepsilon := \varepsilon^{-N}\eta(\cdot/\varepsilon)$ de sorte que $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\eta_\varepsilon \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\eta_\varepsilon) \subset \overline{B}_\varepsilon$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(y)\,dy = 1$. On définit $f_\varepsilon := f * \eta_\varepsilon$, i.e. pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_U(y)\,dy.$$

D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on a $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, si $x \notin \overline{U} + \overline{B}_\varepsilon$, alors $|x-y| > \varepsilon$ dès lors que $y \in \overline{U}$, ce qui implique que $f_\varepsilon(x) = 0$. Par conséquent, si $\varepsilon < d/3$, alors $\mathrm{Supp}(f_\varepsilon) \subset \overline{U} + \overline{B}_\varepsilon \subset \overline{U}'$, ce qui montre que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{Supp}(f_\varepsilon) \subset V$. Par ailleurs, si $x \in K$ et $y \in B_\varepsilon(x)$, alors $y = (y-x) + x \in B_\varepsilon + K \subset U$. Par conséquent, si $x \in K$, on a

$$f_\varepsilon(x) = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\mathbf{1}_U(y)\,dy = \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(y)\,dy = 1.$$

La fonction $f := f_{d/6}$ satisfait donc les propriétés requises. ☐

Le résultat suivant donne l'existence d'une partition de l'unité régulière.

Proposition 3.2. *Soient $V_1, \ldots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe des fonctions $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que* $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset V_i$ *et $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ sur K.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ contenues dans V_i. Alors K_i est un compact tel que $K_i \subset V_i$ et $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$.

Pour tout $1 \leq i \leq n$, soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset\subset V_i$. D'après le Lemme 3.1, il existe une fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq f_i \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $f_i = 1$ sur $\overline{U}_i$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$. Par conséquent, $\sum_{i=1}^n f_i \geq 1$ sur $U := \bigcup_{i=1}^n U_i$ qui est un ouvert contenant K. En utilisant de nouveau le Lemme 3.1, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $0 \leq f \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset U$. Par conséquent,

$$1 - f + \sum_{i=1}^n f_i \geq 1 \quad \text{dans } \mathbb{R}^N$$

et donc la fonction

$$\theta_i = \frac{f_i}{1 - f + \sum_{j=1}^n f_j}$$

est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$. Clairement on a $0 \leq \theta_i \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$, $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^n \theta_i = 1$ sur K. ☐

3.2 Ouverts à frontière régulière

Définition 3.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe

— un $r > 0$,
— une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$,
— une fonction $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$

tels que, en identifiant $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{N-1})$ avec $\mathbb{R}^{N-1}$ et $\mathrm{Vect}(e_N)$ avec $\mathbb{R}$,

$$\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) : \ y_N < a(y_1, \ldots, y_{N-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) : \ y_N = a(y_1, \ldots, y_{N-1})\},$$

où $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \ |y_i - x_i| < r \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\}$. Si $k \geq 1$, la normale unitaire extérieure à Ω en $y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, a(y_1, \ldots, y_{N-1}) = (y', a(y')) \in \partial\Omega \cap Q_r(x)$ est bien définie et est donnée par

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla a(y')\|^2}}(-\nabla a(y'), 1).$$

De plus, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, la formule de l'aire montre que l'intégrale de bord de φ sur $\partial\Omega \cap Q_r(x)$ est donnée par

$$\int_{\partial\Omega \cap Q_r(x)} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{x' +]-r,r[^{N-1}} \varphi(y', a(y')) \sqrt{1 + \|\nabla a(y')\|^2} \, dy'.$$

Si Ω est borné, alors $\partial\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut alors recouvrir $\partial\Omega$ par un nombre fini de cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$(pour $i = 1, \ldots, m$) qui satisfont les propriétés ci-dessus. Soit $\theta_1, \ldots, \theta_m$ est une partition de l'unité associée à $Q_1, \ldots, Q_m$:
— pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, $0 \leq \theta_i \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$ et $\mathrm{Supp}(\theta_i) \subset Q_i$;
— $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$.
Alors, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, on a

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial\Omega \cap Q_i} \theta_i \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

3.3 Formule de Gauss-Green

Le résultat suivant est une version N-dimensionelle de la formule d'intégration par parties, bien connue en dimension 1.

Théorème 3.4. (Formule de Gauss-Green) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.1}$$

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$,

$$\int_\Omega \nabla f(x) \, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.2}$$

Démonstration. Nous démontrons seulement la formule (3.2).

Etape 1. On suppose ici que $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. Comme f est à support dans Ω, on peut l'étendre par zéro à tout $]-R, R[^N$ en une fonction (toujours notée f) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[^N$. D'après le Théorème de Fubini, on a alors que pour tout $1 \leq j \leq N$,

$$\int_\Omega \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^N} \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j \right) dx_1 \cdots dx_{j-1} \, dx_{j+1} \cdots dx_N.$$

Or

$$\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -R, x_{j+1}, \ldots, x_N) = 0$$

car $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega \subset]-R, R[^N$. Par conséquent, comme $f = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla f \, dx = 0 = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Etape 2. Soit $x \in \partial\Omega$, $r > 0$, $Q := Q_r(x)$ et $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R})$ comme dans la Définition 3.3. Plaçons nous dans la base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ donnée par la paramétrisation locale de $\partial\Omega$. On note alors $\partial_i f = \nabla f \cdot e_i$ la dérivée dans la direction e_i de sorte que $\nabla f = \sum_{i=1}^N (\partial_i f) e_i$. Montrons que

$$\int_\Omega \nabla f(y) \, dy = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\mathcal{H}^{N-1} \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^1_c(Q).$$

Tout d'abord, on a d'après le Théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \partial_N f(y) \, dy &= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{a(y')} \partial_N f(y', y_N) \, dy_N \right) dy' \\
&= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', a(y')) \, dy' = \int_{\partial\Omega \cap Q} f\nu_N \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu_N \, d\mathcal{H}^{N-1}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $j \neq N$, et $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$, on a que

$$\partial_j \left(\int_{-R}^{a(y')} f(y', y_N) \, dy_N \right) = f(y', a(y'))\partial_j a(y') + \int_{-R}^{a(y')} \partial_j f(y', y_N) \, dy_N.$$

On intègre à présent par rapport à $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$. Comme $f = 0$ sur ∂Q, le Théorème de Fubini montre que le membre de gauche s'annule et donc que

$$0 = \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', a(y'))\partial_j a(y') \, dy' + \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{a(y')} \partial_j f(y', y_N) \, dy_N \right) dy',$$

soit

$$\int_\Omega \partial_j f(y) \, dy = \int_{\partial\Omega \cap Q} f\nu_j \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu_j \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Etape 3. Soit $Q_1, \ldots, Q_m$ un recouvrement de $\partial\Omega$ par des cubes satisfaisant les propriétés de la Définition 3.3. On considère également un ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et

$$\overline{\Omega} \subset \omega \cup \bigcup_{i=1}^m Q_i.$$

Soit $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_N$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\omega, Q_1, \ldots, Q_m\}$ de $\overline{\Omega}$:
— $\theta_0 \in \mathcal{C}^\infty_c(\omega)$, $0 \leq \theta_0 \leq 1$ et, pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}^\infty_c(Q_i)$ et $0 \leq \theta_i \leq 1$;
— $\sum_{i=0}^m \theta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

Comme $f = \sum_{i=0}^m \theta_i f$ dans Ω, on a que

$$\int_\Omega \nabla f(x)\, dx = \int_\omega \nabla(\theta_0 f)\, dx + \sum_{i=1}^m \int_{\Omega\cap Q_i} \nabla(\theta_i f)\, dx.$$

D'après l'étape 1, du fait que $\mathrm{supp}(\theta_0 f) \subset \omega \subset]-R, R[^N$, on en déduit que

$$\int_\omega \nabla(\theta_0 f)\, dx = 0. \tag{3.3}$$

Si $1 \le i \le m$, comme $\theta_i f \in \mathcal{C}^1_c(Q_i)$, on peut appliquer l'étape 2 pour obtenir que

$$\int_\Omega \nabla(\theta_i f)\, dx = \int_{\partial\Omega} \theta_i f \nu \, d\mathcal{H}^{N-1}. \tag{3.4}$$

En regroupant (3.3) et (3.4), il vient

$$\int_\Omega \nabla f\, dx = \sum_{i=0}^m \int_\Omega \nabla(\theta_i f)\, dx = \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega} \theta_i f \nu\, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial\Omega} f\nu\, d\mathcal{H}^{N-1},$$

où l'on a utilisé le fait que sur $\partial\Omega$, $\theta_0 = 0$ et donc $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$. □

4 Intégration en coordonnées polaires

Le résultat suivant généralise la formule d'intégration en coordonnées polaires bien connue en dimension 2 et 3.

Théorème 4.1. *Soit $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction Borélienne positive, alors*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g(y)\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,1)} g(ry)\, d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right) r^{N-1}\, dr.$$

Démonstration. Montrons d'abord que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\}) = 0$ pour tout $r > 0$. Pour ce faire, on constate que $x = (x', x_N) \in \partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\}$ si et seulement si $|x'| = r$ et $x_N = 0$. En notant $B'(0,r) = \{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x'| < r\}$ la boule de centre 0 et de rayon r dans $\mathbb{R}^{N-1}$, on a alors $\partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\} = \partial B'(0,r) \times \{0\}$. Comme $\mathcal{H}^{N-2}(\partial B'(0,r)) = \mathcal{H}^{N-2}(r(\partial B'(0,1))) = r^{N-2}\mathcal{H}^{N-2}(\partial B'(0,1)) = (N-1)\omega_{N-1} r^{N-2} \in]0, \infty[$, on en déduit que $\mathcal{H}^{N-2}(\partial B'(0,r)) < \infty$ et donc que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial B'(0,r)) = 0$. Soit $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ la projection orthogonale définie par $p(x) = x'$ pour tout $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N$. Comme p est un isomorphisme isométrique de $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ sur $\mathbb{R}^{N-1}$, on en déduit que $\partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\} = p^{-1}(\partial B'(0,r))$ et donc,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\}) = \mathcal{H}^{N-1}(p^{-1}(\partial B'(0,r))) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B'(0,r)) = 0.$$

Montrons ensuite que pour tout $r > 0$,

$$\int_{\partial B(0,r) \cap \{\pm x_N > 0\}} g\, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} :\, |x'| \le r\}} g\left(x', \pm\sqrt{r^2 - |x'|^2}\right) \frac{r}{\sqrt{r^2 - |x'|^2}}\, dx'.$$

En effet, si $\varepsilon > 0$, on peut écrire

$$\partial B(0,r) \cap \{x_N > \varepsilon\} = \left\{ (x', x_N) \in B'(0, \sqrt{r^2 - \varepsilon^2}) \times]\varepsilon, +\infty[\,:\, x_N = \sqrt{r^2 - |x'|^2} \right\}.$$

L'application $a : B'(0, \sqrt{r^2-\varepsilon^2}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$a(x') = \sqrt{r^2 - |x'|^2}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $B'(0, \sqrt{r^2-\varepsilon^2})$ et pour tout $x' \in B'(0, \sqrt{r^2-\varepsilon^2})$, on a

$$\nabla a(x') = -\frac{x'}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}, \quad \sqrt{1+|\nabla a(x')|^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N>\varepsilon\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{B'(0,\sqrt{r^2-\varepsilon^2})} g(x', a(x'))\sqrt{1+|\nabla a(x')|^2}\,dx' \\ &= \int_{B'(0,\sqrt{r^2-\varepsilon^2})} g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dx'. \end{aligned}$$

Comme $g \geq 0$, par passage à la limite quand $\varepsilon \searrow 0$, il vient d'après le théorème de la convergence monotone que

$$\int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N>0\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{B'(0,r)} g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dx'.$$

On intègre l'égalité

$$\int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N>0\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{B'(0,r)} g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dx'.$$

par rapport à $r \in]0, +\infty[$ puis on utilise le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N>0\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1}\right)dr &= \int_0^\infty \left(\int_{B'(0,r)} g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dx'\right)dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{|x'|}^\infty g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dr\right)dx'. \end{aligned}$$

On change de variable $s = \sqrt{r^2-|x'|^2}$ dans la première intégrale ce qui donne

$$\int_{|x'|}^\infty g(x', \sqrt{r^2-|x'|^2})\frac{r}{\sqrt{r^2-|x'|^2}}\,dr = \int_0^\infty g(x', s)\,ds$$

puis on utilise de nouveau le théorème de Fubini qui donne

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N>0\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1}\right)dr = \int_{\mathbb{R}^N_+} g(x)\,dx.$$

On montre de même que

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)\cap\{x_N<0\}} g\,d\mathcal{H}^{N-1}\right)dr = \int_{\mathbb{R}^N_-} g(x)\,dx.$$

En regroupant et en utilisant que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial B(0,r) \cap \{x_N = 0\}) = 0$, on conclut que

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g \, d\mathcal{H}^{N-1} \right) dr = \int_{\mathbb{R}^N} g(x) \, dx.$$

Pour la deuxième formule, on utilise la $(N-1)$-homogénéité de $\mathcal{H}^{N-1}$. Pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \partial B(0,r)) = \mathcal{H}^{N-1}(r(r^{-1}A \cap \partial B(0,1))) = r^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(r^{-1}A \cap \partial B(0,1)),$$

soit

$$\int_{\partial B(0,r)} \mathbf{1}_A \, d\mathcal{H}^{N-1} = r^{N-1} \int_{\partial B(0,1)} \mathbf{1}_A(ry) \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on pour toute fonction étagée et positive h, on a

$$\int_{\partial B(0,r)} h \, d\mathcal{H}^{N-1} = r^{N-1} \int_{\partial B(0,1)} h(ry) \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

On obtient la formule pour toute fonction Borélienne $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ par approximation de g par une suite croissante de fonctions Boréliennes étagées, puis par application du théorème de la convergence monotone. $\square$