Convergence faible et faible*

Jean-François Babadjian
Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr

Nous introduisons ici un autre mode de convergence, appelée convergence faible* dans le dual E' d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$. Ce mode de convergence s'appliquera notamment aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour $1 < p \leq \infty$ qui sont le dual de $L^q(\Omega)$ (avec $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$) ou encore de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

1 Convergence faible*

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E', et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La limite faible* est toujours unique car si f et g sont deux limites faible* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\langle f - g, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, puis par passage au sup en x, il vient d'après la définition de la norme dans E' que $\|f - g\|_{E'} = 0$, soit $f = g$.

Exemple 1.2.
1. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d'après le Théorème de Riesz, la convergence faible* $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ dans H signifie que
$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \text{pour tout } y \in H.$$
2. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini et $1 < p \leq \infty$, la convergence faible* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^p(X)$ s'écrit
$$\int_X f_n g\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu, \quad \text{pour tout } g \in L^q(X)$$
où $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$.
3. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, la converge faible* vers $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ signifie que
$$\int_\Omega f\, d\lambda_n \to \int_\Omega f\, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Le résultat suivant montre que la convergence faible* fournit effectivement une notion plus faible de convergence que celle pour la topologie de la norme.

Proposition 1.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' qui converge (fortement) vers f, i.e., $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E'.*

Démonstration. Si $x \in E$, par définition de la norme dans E',

$$|\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f_n - f, x\rangle| \leq \|f_n - f\|_{E'} \|x\|_E \to 0,$$

ce qui établit le résultat. □

Comme le montre le résultat suivant, la réciproque est en général fausse.

Définition 1.4. Soit H un espace de Hilbert. On dit que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H si elle est

i) *orthornormée :* pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$;

ii) *totale :* $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans H, *i.e.*, tout élément de H est la limite d'une suite de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Notons que le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Proposition 1.5. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Alors $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H.*

Démonstration. Le fait que $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ résulte du fait que la base est orthonormée.

Notons $F_n := \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ qui est un sous espace fermé (car de dimension fini) de E. Par conséquent, la projection orthogonale $P_n(x)$ d'un élément $x \in H$ sur F_n est bien définie. Par ailleurs, on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

En effet, $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$\langle x - P_n(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

car $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ceci montre que $\langle x - P_n(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F_n$ et que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Par ailleurs, le fait que la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ est orthonormée montre que

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Comme $x = P_n(x) + x - P_n(x)$ avec $P_n(x) \in F_n$ et $x - P_n(x) \in F_n^\perp$ et, d'après Pythagore, on a que

$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

La série précédente étant convergente, son terme général tend vers zéro, soit $\langle x, e_n\rangle \to 0$, ce qui montre bien que $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H. □

Le résultat précédent nous fournit un cas de suite faiblement convergente qui ne converge pas fortement. Toutefois, en dimension finie, les deux notions de convergence coïncident.

Proposition 1.6. *Soient E un espace de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors $f_n \to f$ fortement dans E'.*

Démonstration. Soit $d = \dim(E) = \dim(E')$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ la base de E' duale de $\mathcal{B}$ (i.e. $\langle e_i^*, e_j\rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \le i, j \le d$). Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on considère la norme suivante sur E' :

$$\|f\|^2 := \sum_{i=1}^d f_i^2, \quad \text{où } f = \sum_{i=1}^d f_i e_i^*.$$

Comme $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', on a en particulier que $(f_n)_i = \langle f_n, e_i\rangle \to \langle f, e_i\rangle = f_i$ pour tout $i = 1, \dots, d$, et donc

$$\|f_n - f\|^2 = \sum_{i=1}^d |(f_n)_i - f_i|^2 \to 0$$

car la somme est finie. □

1.2 Propriétés de compacité

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de bornitude et compacité. Rappelons un résultat classique des espaces métriques complets.

Théorème 1.7 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X ;

(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration. L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \ne \emptyset. \tag{1.1}$$

Puisque U_0 est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \ge m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d) complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m, r_m)$ pour tout $n \ge m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (1.1) est vérifié. □

Les résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

Théorème 1.8 (Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < \infty \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme T_i est continue, $x \mapsto \|T_i(x)\|_F$ l'est également et donc $\{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé pour tout $i \in I$. En écrivant que $X_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$, on obtient ainsi que X_n est fermé. Par ailleurs, par hypothèse, on a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble E étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|T_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors $x_0 + r_0 x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|T_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|T_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il vient

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|T_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. □

Proposition 1.9. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' telle que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors*

i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' ;

ii) $\|f\|_{E'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E'}$;

iii) si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ et donc la suite numérique $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle| < \infty \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Le Théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $x \in E$,

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to+\infty}\langle f_n, x\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{E'}\|x\|_E.$$

On divise ensuite par $\|x\|_E$ puis on passe au sup en $x \in E$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0}\frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|_E} \leq \liminf_{n\to+\infty}\|f_n\|_{E'}.$$

Enfin, si $x_n \to x$ fortement dans E, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n - f, x\rangle \\ &\leq \|f_n\|_{E'}\|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' par une constante $M > 0$ (indépendante de n), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq M\|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle| \to 0,$$

ce qui montre iii) et conclut la preuve de la Proposition. □

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible*. Il assure, dans le dual d'un espace séparable, que toute suite bornée est faible* séquentiellement relativement compacte.

Théorème 1.10. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E', i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < \infty,$$

alors on peut en extraire une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faible vers un élément $f \in E'$.*

Démonstration. Soit $D = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonale. Comme la suite numérique $(\langle f_n, x_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0(n)}, x_0\rangle \to L(x_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(x_0), \dots, L(x_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \le j \le k$,

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}, x_j\rangle \to L(x_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}, x_{k+1}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}, x_{k+1}\rangle \to L(x_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_n(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)})_{n\ge k}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle \to L(x_k).$$

Montrons que, pour tout $x \in E$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\ge n(x)}$ converge. Soit donc $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un x_k tel que $\|x - x_k\|_E \le \varepsilon$. Par conséquent, pour tout m, $n \ge k$,

$$\begin{aligned}|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| &\le |\langle f_{\sigma(n)}, x - x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(m)}, x - x_k\rangle| \\ &\le (\|f_{\sigma(m)}\|_{E'} + \|f_{\sigma(n)}\|_{E'})\|x - x_k\|_E + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.\end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \le 2M\varepsilon + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \ge N_k$, $|\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| \le \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout m, $n \ge n(x) := \max(N_k, k)$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \le (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\ge n(x)}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(x)$.

On montre enfin que l'application $x \mapsto L(x)$ est linéaire et comme

$$|L(x)| = \lim_{n\to\infty} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle| \le M\|x\|_E,$$

elle est continue et donc $L \in E'$, ce qui montre que $f_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} L$ faible* dans E'. □

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, le résultat précédent s'applique en particulier aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p \leq \infty$ car il s'agit de l'espace dual de $L^q(\Omega)$ pour un certain $1 \leq q < \infty$ qui est séparable. Il en est de même de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de l'espace séparable $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

2 Le théorème de Hahn-Banach

2.1 Forme analytique

Le théorème de Hahn-Banach, sous sa forme analytique, concerne le prolongement d'une forme linéaire.

Théorème 2.1 (Hahn-Banach, forme analytique). *Soient E un espace vectoriel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application*

i) positivement homogène de degré 1 : $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$ et tout $x \in E$;

ii) sous-additive : $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pour tout x, $y \in E$.

Soient, d'autre part, G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire majorée par p :

$$g(x) \leq p(x), \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Alors, il existe une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g :

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in G$$

et majorée par p

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Démonstration. Nous présentons pour simplifier une démonstration dans le cas où *E est un espace vectoriel topologique séparable et p est continue.* Dans sa version générale la démonstration de ce résulltat repose sur des arguments subtils de théorie des ensembles (en particulier l'axiome du choix et le Lemme de Zorn).

Etape 1. Soient W un sous-espace vectoriel de E tel que $W \neq E$ et $h : W \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que $h(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in W$. Montrons que pour tout $x_0 \notin W$, il existe une forme linéaire $\tilde{h}$ sur $\tilde{W} := W + \mathbb{R}x_0$ telle que

$$\tilde{h}(x) = h(x) \quad \text{pour tout } x \in W$$

et

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \quad \text{pour tout } x \in \tilde{W}.$$

On définit $\tilde{h}(x + tx_0) = h(x) + \alpha t$ pour tout $x \in W$ et $t \in \mathbb{R}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée ultérieurement. Par définition, $\tilde{h}$ est une forme linéaire sur $\tilde{W}$ et $\tilde{h}(x) = h(x)$ si $x \in W$. Montrons maintenant que, pour un choix opportun de α, on a $\tilde{h}(x + tx_0) \leq p(x + tx_0)$ pour tout $x \in W$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après l'hypothèse d'homogénéité de p et la linéarité de $\tilde{h}$, il suffit de vérifier que cette inégalité est satisfaite pour $t = \pm 1$. Or d'aprè's la linéarité de h et la sous-additivité de p, on a pour tout x, $y \in W$,

$$h(x) + h(y) = h(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

ce qui montre que

$$p(x + x_0) - h(x) \geq h(y) - p(y - x_0), \quad \text{pour tout } x, y \in W.$$

Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{x\in W}\{p(x+x_0)-h(x)\} \geq \alpha \geq \sup_{y\in W}\{h(y)-p(y-x_0)\},$$

il vient alors que pour tout $x \in W$,

$$\tilde{h}(x+x_0) = h(x)+\alpha \leq p(x+x_0) \text{ et } \tilde{h}(x-x_0) = h(x)-\alpha \leq p(x-x_0),$$

ce qui montre bien l'inégalité annoncée.

Etape 2. Soit $\{a_n\}_{n\geq 1}$ une suite dénombrable dense dans E. On pose $G_0 = G$ et, pour tout $n \geq 1$, $G_n := G_{n-1} + \mathbb{R}a_n$. Grâce à l'étape 1 et une récurrence, on montre que, pour tout $n \geq 1$, il existe une application linéaire $g_n : G_n \to \mathbb{R}$ telle que

$$g_n(x) = g_{n-1}(x) \quad \text{ pour tout } x \in G_{n-1}$$

et

$$g_n(x) \leq p(x), \quad \text{ pour tout } x \in G_n.$$

En particulier, $g_n = g$ sur G pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in Y := \bigcup_{n\geq 1} G_n$, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}^*$ tel que $x \in G_n$ pour tout $n \geq n(x)$. On pose alors pour tout $x \in Y$,,

$$\tilde{g}(x) := g_n(x), \quad n \geq n(x)$$

et on vérifie que $\tilde{g}$ est linéaire, $\tilde{g} = g$ sur G et $\tilde{g} \leq p$ sur Y.

Etape 3. Par densité de $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dans E, on a que $\overline{Y} = E$. Soit $x \in E$, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y telle que $x_n \to x$. Par conséquent, pour tout n, $m \in \mathbb{N}$, on a que

$$\tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(x_m) = \tilde{g}(x_n - x_m) \leq p(x_n - x_m)$$

et

$$\tilde{g}(x_m) - \tilde{g}(x_n) = -\tilde{g}(x_n - x_m) \geq -p(x_m - x_n),$$

ce qui montre que la suite numérique $(\tilde{g}(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un élément $f(x) \in \mathbb{R}$. Notons que la limite ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de Y qui converge vers x, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$-p(y_n - x_n) \leq \tilde{g}(x_n) - \tilde{g}(y_n)| \leq p(x_n - y_n).$$

On définit ainsi une application $f : E \to \mathbb{R}$ qui est linéaire. Comme $f = \tilde{g}$ sur Y et $\tilde{g} = g$ sur G, on obtient que $f = g$ sur G et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de Y telle que $x_n \to x$, alors comme $\tilde{g} \leq p$ sur Y, on a

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{g}(x_n) \leq \lim_{n\to+\infty} p(x_n) = p(x),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Le théorème de Hahn-Banach permet de montrer que toute forme linéaire continue sur un sous-espace vectoriel normé peut se prolonger à tout l'espace sans augmenter la norme.

Corollaire 2.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et G un sous-espace vectoriel de E. Soit $g \in G'$ de norme*

$$\|g\|_{G'} := \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle g, x\rangle.$$

Alors, il existe $f \in E'$ tel que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in G$ et

$$\|f\|_{E'} := \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle = \|g\|_{G'}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Hahn-Banach avec $p(x) := \|g\|_{G'}\|x\|$ pour tout $x \in E$. On obtient alors une application linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge g et telle que

$$\langle f, x\rangle \leq \|g\|_{G'}\|x\|, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Par conséquent, $f \in E'$ et $\|f\|_{E'} \leq \|g\|_{G'}$. L'autre inégalité est évidente puisque

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle \geq \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle f, x\rangle = \sup_{x\in G, \|x\|\leq 1} \langle g, x\rangle = \|g\|_{G'},$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

Le corollaire suivant permet de calculer la norme d'un élément d'un espace vectoriel normé par dualité.

Corollaire 2.3. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Pour tout* $x \in E$,

$$\|x\| = \max_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} \langle f, x\rangle. \tag{2.1}$$

Démonstration. Par définition de la norme dans E', on a que pour tout $f \in E'$ et tout $x \in E$, $\langle f, x\rangle \leq \|f\|_{E'}\|x\|$ et donc par passage au sup

$$\|x\| \geq \sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} \langle f, x\rangle.$$

Pour montrer l'inégalité, on applique le corollaire 2.2 avec $G = \mathbb{R}x$ et $g(tx) = t\|x\|^2$, en observant que $\|g\|_{G'} = \|x\|$. On trouve alors un $f \in E'$ tel que $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'} = \|x\|$ et $f(x) = g(x) = \|x\|^2 = \|f\|_{E'}\|x\|$. □

Remarque 2.4. Notons que si $E = F'$ est le dual d'un espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|_F)$, on a par définition de la norme d'une application linéaire

$$\|f\|_{F'} = \sup_{x\in F, \|x\|_F\leq 1} \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } f \in F'.$$

En parculier, le sup n'est en général pas atteint. La formule 2.1 nous fournit une formule similaire dans le cas où E n'est pas forcément un espace dual. Il convient toutefois de noter qu'elle est loin d'être triviale puisqu'elle résulte du théorème de Hahn-Banach, alors que dans le cas où F', il s'agit d'une définition.

2.2 Formes géométriques

On se donne à présent un espace vectoriel normé E. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire non nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $H := \{x \in E : \langle f, x\rangle = \alpha\}$ est un hyperplan.

Proposition 2.5. *L'hyperplan* H *est fermé si et seulement si* f *est continue.*

Démonstration. Si $f \in E'$, alors clairement H est fermé. Réciproquement, supposons que H est fermé et considérons un élément $x_0 \in E \setminus H$. Le complémentaire de H étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset E \setminus H$. Supposons que $\langle f, x_0\rangle < \alpha$ (le cas $\langle f, x_0\rangle > \alpha$ pouvant être traité de façon similaire) et montrons que $\langle f, x\rangle < \alpha$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Supposons par l'absurde l'existence d'un $x_1 \in \overline{B}(x_0, r)$ tel que $\langle f, x_1\rangle > \alpha$. Comme le segment

$$[x_0, x_1] = \{(1 - t)x_0 + tx_1 : t \in [0, 1]\} \subset \overline{B}(x_0, r),$$

on en déduit que $\langle f, (1-t)x_0 + tx_1\rangle \neq \alpha$ pour tout $t \in [0,1]$. Or le choix $t = \frac{\alpha - \langle f, x_0\rangle}{\langle f, x_1\rangle - \langle f, x_0\rangle}$ aboutit à une contradiction ce qui montre bien que $\langle f, x\rangle < \alpha$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r)$. Par conséquent, pour tout $z \in \overline{B}(0,1)$, $x_0 + rz \in \overline{B}(x_0, r)$ et donc

$$\langle f, x_0 + rz\rangle < \alpha, \qquad \text{pour tout } z \in \overline{B}(0,1),$$

d'où $\|f\|_{E'} \leq \frac{1}{r}(\alpha - \langle f, x_0\rangle)$. □

Définition 2.6. Soient A et B deux parties de E.

i) L'hyperplan H sépare A et B si $\langle f, a\rangle \leq \alpha \leq \langle f, b\rangle$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$;

ii) L'hyperplan H sépare strictement A et B s'il existe un $\varepsilon > 0$, $\langle f, a\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle f, b\rangle$ pour tout $a \in A$ et $b \in B$.

2.2.1 Ensembles convexes et jauge

Définition 2.7. Soit C une partie d'un espace vectoriel E. On dit que C est convexe si pour tout x, $y \in C$, le segment $[x,y] := \{ty + (1-t)x : t \in [0,1]\}$ est inclus dans C.

En guise d'exemple, tout sous-espace vectoriel de E est convexe. Toute boule d'un espace vectoriel normé est convexe.

Lemme 2.8. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et C un ensemble convexe et ouvert tel que $0 \in C \subset E$. On définit la jauge de C par*

$$j(x) := \inf\{\alpha > 0 : \ \alpha^{-1}x \in C\}, \qquad \textit{pour tout } x \in E.$$

Alors

i) j est positivement homogène de degré 1 ;

ii) j est sous-additive ;

iii) il existe $M > 0$ telle que $0 \leq j(x) \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$;

iv) $C = \{x \in E : j(x) < 1\}$.

Démonstration. Si $x \in E$ et $\lambda \geq 0$,

$$j(\lambda x) := \inf\{\alpha > 0 : \ \alpha^{-1}\lambda x \in C\} = \lambda \inf\{\alpha/\lambda > 0 : \ (\alpha/\lambda)^{-1}x \in C\} = \lambda j(x),$$

ce qui montre i).

Pour ii), soient x et $y \in E$ et $\varepsilon > 0$, alors $x/(j(x)+\varepsilon) \in C$ et $y/(j(y)+\varepsilon) \in C$. Par convexité de C,

$$t\frac{x}{j(x)+\varepsilon} + (1-t)\frac{y}{j(y)+\varepsilon} \in C, \qquad \text{pour tout } t \in [0,1].$$

En choisissant $t = \frac{j(x)+\varepsilon}{j(x)+j(y)+2\varepsilon}$, il vient $\frac{x+y}{j(x)+j(y)+2\varepsilon} \in C$, soit $j(x+y) \leq j(x) + j(y) + 2\varepsilon$. On obtient alors ii) par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Comme $0 \in C$ et C est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $\overline{B}(0,r) \subset C$. Donc pour tout $x \in E$, on a $rx/\|x\| \in \overline{B}(0,r)$ et donc $j(x) \leq \|x\|/r$, ce qui montre iii) avec $M = 1/r$.

Enfin, si $x \in C$, comme C est ouvert, il existe un $r' > 0$ tel que $B(x, r') \subset C$. Soit $\varepsilon < r'/\|x\|$, alors $\|(1+\varepsilon)x - x\| = \varepsilon\|x\| < r'$ ce qui montre que $(1+\varepsilon)x \in B(x,r') \subset C$. Par conséquent, $j(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. Réciproquement, si $j(x) < 1$, alors il existe un $j(x) < \alpha < 1$ tel que $x/\alpha \in C$. Comme $0 \in C$, on en déduit que $x = \alpha(x/\alpha) + (1-\alpha)0 \in C$, ce qui montre iv). □

Proposition 2.9. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et C un ensemble convexe, ouvert et non vide. Si $x \notin C$, il existe $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(y) < f(x)$ pour tout $y \in C$. En particulier, l'hyperplan $\{y \in E : f(y) = f(x)\}$ sépare $\{x\}$ et C.*

Démonstration. Par translation, on se ramène au cas $0 \in C$. On considère la forme linéaire g sur $G = \mathbb{R}x$ définie par $g(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrons que $g(tx) \leq j(tx)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où j est la jauge de C. Si $t \leq 0$, l'inégalité est évidente. Si $t = 1$, alors $g(x) = 1 \leq j(x)$ car $x \notin C$ d'après le lemme 2.8. Enfin si $t > 0$ alors, $j(tx) = t \leq tj(x) = j(tx)$ toujours d'après le lemme 2.8. Le théorème de Hahn-Banach sous forme analytique (théorème 2.1) implique alors l'existence d'une forme linéaire $f : E \to \mathbb{R}$ telle que $f(tx) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $f(y) \leq j(y)$ pour tout $y \in E$. En particulier, $f(y) \leq M\|y\|$ pour tout $y \in E$ ce qui montre que $f \in E'$, et $f(y) \leq j(y) < 1 = f(x)$ pour tout $y \in C$ d'après le lemme 2.8. □

2.2.2 Séparation d'ensembles convexes

On montre à présent une première version géométrique du théorème de Hahn-Banach qui concerne la séparation large de deux ensembles convexes disjoints.

Théorème 2.10 (Hahn-Banach, première forme géométrique). *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux ensembles convexes non vides disjoints de E. On suppose A ouvert. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*

Démonstration. Soit $C = A - B = \{a - b : a \in A,\, b \in B\}$. Alors
- C est ouvert car $C = \bigcup_{b \in B}(A - b)$;
- C est convexe car si x, $y \in C$ et $t \in [0, 1]$, on peut trouver a_1, $a_2 \in A$ et b_1, $b_2 \in B$ tels que $x = a_1 - b_1$ et $y = a_2 - b_2$. Par conséquent, $tx + (1-t)y = ta_1 + (1-t)a_2 - tb_1 - (1-t)b_2$. Par convexité de A et B, on a que $ta_1 + (1-t)a_2 \in A$ et $tb_1 + (1-t)b_2 \in B$, ce qui montre que $tx + (1-t)y \in C$;
- $0 \notin C$ car sinon, il existerait $a \in A$ et $b \in B$ tels que $0 = a - b$, soit $a = b$, ce qui est impossible puisque A et B sont disjoints.

La proposition 2.9 montre alors l'existence d'un $f \in E' \setminus \{0\}$ tel que $f(y) < f(0) = 0$ pour tout $y \in C$. Par conséquent, $f(a) < f(b)$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$. Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\sup_{a \in A} f(a) \leq \alpha \leq \inf_{b \in B} f(b)$, alors l'hyperplan $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ sépare effectivement A et B. □

On peut améliorer le résultat précédent et montrant un résultat de séparation stricte quand l'un des ensembles est fermé et l'autre compact

Théorème 2.11 (Hahn-Banach, seconde forme géométrique). *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A et B deux ensembles convexes non vides disjoints de E. On suppose A fermé et B compact. Alors, il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on pose $A_\varepsilon = A + B(0, \varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0, \varepsilon)$. Les ensembles A_ε et B_ε sont ouverts, convexes et non vide. De plus, il existe un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$. En effet, dans le cas contraire, il existerait une suite $\varepsilon_n \to 0$ telle que $A_{\varepsilon_n} \cap B_{\varepsilon_n} \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on pourrait trouver deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ telles que $\|a_n - b_n\| \leq 2\varepsilon_n$. L'ensemble B étant compact, on peut extraire une sous-suite $(b_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $b \in B$. Par conséquent, on a aussi que $a_{\sigma(n)} \to b$ et comme A est fermé, il vient que $b \in A$ ce qui est absurde puisque A et B sont disjoints. Le théorème 2.10 montre alors l'existence d'un $f_\varepsilon \in E' \setminus \{0\}$ et d'un $\alpha_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_\varepsilon(a + \varepsilon x) \leq \alpha_\varepsilon \leq f_\varepsilon(b + \varepsilon x), \quad \text{pour tout } a \in A,\, b \in B \text{ et } x \in B(0, 1).$$

D'où

$$f_\varepsilon(a) + \varepsilon\|f_\varepsilon\|_{E'} \leq \alpha_\varepsilon \leq f_\varepsilon(b) - \varepsilon\|f_\varepsilon\|_{E'},$$

ce qui termine la preuve du théorème puisque $\|f_\varepsilon\|_{E'} > 0$. □

Une application directe du théorème précédent concerne un critère de densité.

Corollaire 2.12. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Alors $\overline{F} = E$ si et seulement si*

$$f \in E' \text{ et } \langle f, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in F \Longrightarrow f = 0.$$

Démonstration. Si $\overline{F} = E$ et $f \in E'$ est tel que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$, alors $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Par passage au sup en x, il vient $\|f\|_{E'} = 0$ ce qui montre que $f = 0$.

Réciproquement, si $\overline{F} \neq E$, alors il existe un $x_0 \in E \setminus \overline{F}$. D'après le théorème de Hahn-Banach, seconde forme géométrique (théorème 2.11), on peut séparer le compact convexe $\{x_0\}$ du fermé convexe $\overline{F}$. Il existe donc un $f \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_0) < \alpha < f(y)$ pour tout $y \in \overline{F}$. En particulier $f(y) > \alpha$ pour tout $y \in F$, ce qui implique que $f = 0$ sur F car c'est un sous-espace vectoriel. ☐

2.2.3 Applications

Les différentes versions du théorème de Hahn-Banach s'appliquent typiquement pour montrer certaines propriétés des ensembles séparables ou des espaces réflexifs.

Proposition 2.13. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace Banach. Si E' est séparable, alors E l'est aussi.*

Démonstration. Soit $D := \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable dense dans E'. Par définition de la norme sur E', pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E$ avec $\|x_n\| = 1$ et $\langle f_n, x_n\rangle \geq \frac{1}{2}\|f_n\|_{E'}$. Notons F l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels. Il s'agit d'un ensemble dénombrable. Montrons qu'il est dense dans E. Pour ce faire, on considère $f \in E'$ tel que $\langle f, x\rangle = 0$ pour tout $x \in F$. Par densité de D dans E', pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $f_n \in D$ tel que $\|f - f_n\|_{E'} \leq \varepsilon$. Par conséquent,

$$\|f\|_{E'} \leq \varepsilon + \|f_n\|_{E'} \leq \varepsilon + 2\langle f_n, x_n\rangle = \varepsilon + 2\langle f_n - f, x_n\rangle + 2\langle f, x_n\rangle.$$

Comme f s'annule sur F et que $f_n \in F$, il vient

$$\|f\|_{E'} \leq \varepsilon + 2\|f_n - f\|_{E'}\|x_n\| \leq 3\varepsilon,$$

ce qui montre que $f = 0$. Le Corollaire 2.12 permet donc de conclure que F est dense dans E et donc que E est séprable. ☐

L'espace E s'identifie naturellement à une partie de E'' via l'application $J : E \to E''$ définie par

$$\langle J(x), L\rangle_{E'',E'} = \langle L, x\rangle_{E',E}, \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Proposition 2.14. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Alors J réalise une isométrie de E sur son image $J(E) \subset E''$, i.e. $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|$ pour tout $x \in E$. En particulier, J est injective et $J(E)$ est fermé dans E''.*

Démonstration. Notons tout d'abord que J est un application linéaire. Par définition de la norme et de J,

$$\|J(x)\|_{E''} = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'} \leq 1} |\langle J(x), L\rangle_{E'',E'}| = \sup_{L\in E', \|L\|_{E'} \leq 1} |\langle L, x\rangle_{E',E}| = \|x\|,$$

où la dernière égalité résulte du corollaire 2.3. Ceci montre que J est une isométrie et donc qu'elle est injective. Montrons à présent que sont image $J(E)$ est fermée dans E''. Pour ce faire, on considère une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $J(E)$ qui converge dans E'' vers un élément $T \in E''$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x_n \in E$ tel que $T_n = J(x_n)$ et J étant une isométrie, on a que $\|x_n - x_m\| = \|J(x_n) - J(x_m)\|_{E''} = \|T_n - T_m\|_{E''}$ pour tout m, $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E qui converge donc vers un élément $x \in E$. Par continuité de J, il vient que $T = J(x)$, ce qui montre que $J(E)$ est fermé dans E''. $\square$

Définition 2.15. Un espace de Banach E est réflexif si l'application J est une bijection, *i.e.*, $J(E) = E''$.

Lorsque E est réflexif, on identifie implicitement E et E'' via l'isomorphisme J. Par exemple, tout espace de Hilbert H est réflexif puisque, par le théorème de Riesz H s'identifie à son dual. Par ailleurs, les espaces $L^p(E)$ sont réflexfis pour $1 < p < \infty$. En revanche ni $L^1(E)$ ni $L^\infty(E)$ ne le sont.

Lemme 2.16. *Si E est réflexif, alors E' l'est aussi.*

Démonstration. Notons d'abord que la proposition 2.14 appliquée à l'espace de Banach réflexif E' montre que $\tilde{J} : E' \to (E')''$, définie par $\langle \tilde{J}(L), T\rangle_{(E'')',E''} = \langle T, L\rangle_{E'',E'}$ pour tout $L \in E'$ et $T \in E''$, est injective et isométrique à image fermée dans $(E')''$. Montrons maintenant qu'elle est sujective. Soit $R \in (E')'' = (E'')'$ une forme linéaire continue sur E'', on pose $L := R \circ J \in E'$. Pour tout $T \in E''$, par réflexibilité de E, il existe un $x \in E$ tel que $T = J(x)$. Par conséquent,

$$\langle R, T\rangle_{(E'')',E''} = \langle R, J(x)\rangle_{(E'')',E''} = \langle L, x\rangle_{E',E} = \langle J(x), L\rangle_{E'',E'} = \langle T, L\rangle_{E'',E'},$$

ce qui montre que l'application $\tilde{J}$ est surjective. Ceci prouve que $(E')''$ est isométriquement isomorphe à E', et donc que E' est réflexif. $\square$

Proposition 2.17. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif et F un sous-espace vectoriel fermé. Alors F est également réflexif.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que F'' est isométriquement isomorphe à une partie de E'' par l'application $I : F'' \to E''$ définie par

$$\langle I(T), L\rangle_{E'',E'} = \langle T, L|_F\rangle_{F'',F'}, \qquad \text{pour tout } T \in F'' \text{ et } L \in E'.$$

Par définition, I est linéaire et

$$|\langle I(T), L\rangle_{E'',E}| \leq \|T\|_{F''}\|L|_F\|_{F'} \leq \|T\|_{F''}\|L\|_{E'},$$

ce qui montre que I est continue de norme $\|I\|_{\mathcal{L}(F'',E'')} \leq 1$. Pour montrer l'inégalité opposée, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\tilde{L} \in F'$ tel que

$$\frac{\langle T, \tilde{L}\rangle_{F'',F'}}{\|\tilde{L}\|_{F'}} + \varepsilon \geq \|T\|_{F''}.$$

D'après le corollaire 2.2, il existe une extension $L \in E'$ telle que $L|_F = \tilde{L}$ et $\|L\|_{E'} = \|\tilde{L}\|_{F'}$. Par conséquent,

$$\frac{\langle I(T), L\rangle_{E'',E'}}{\|L\|_{E'}} = \frac{\langle T, \tilde{L}\rangle_{F'',F'}}{\|\tilde{L}\|_{F'}} \geq \|T\|_{F''} - \varepsilon,$$

ce qui montre que $\|I(T)\|_{E''} \geq \|T\|_{F''}$ et donc $\|I\|_{\mathcal{L}(F'',E'')} \geq 1$. Par conséquent, I réalise une isométrie de F'' sur sont image $I(F'') \subset E''$ ce qui prouve que F'' et $I(F'')$ sont isométriquement isomorphes.

Il s'agit à présent de montrer que pour tout $T \in F''$, il existe un $v \in F$ tel que

$$\langle T, \mathcal{L} \rangle_{F'',F'} = \langle \mathcal{L}, v \rangle_{F',F}, \qquad \text{pour tout } \mathcal{L} \in F'. \tag{2.2}$$

D'après ce qui vient d'être fait, il existe un $I(T) \in E''$ tel que $\langle I(T), L \rangle_{E'',E'} = \langle T, L|_F \rangle_{F'',F'}$ pour tout $L \in E'$. Or E étant réflexif, il existe un $v \in E$ tel que $\langle L, v \rangle_{E',E} = \langle I(T), L \rangle_{E'',E'}$ et par conséquent

$$\langle T, L|_F \rangle_{F'',F'} = \langle L, v \rangle_{E',E}. \tag{2.3}$$

Montrons à présent que $v \in F$. Pour ce faire, supposons par l'absurde que $v \notin F$. Le théorème de Hahn-Banach, deuxième forme géoémétrique (théorème 2.11) permet de séparer strictement le compact $\{v\}$ du fermé convexe F. Il existe donc $L_0 \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L_0, v \rangle_{E',E} < \alpha < \langle L_0, w \rangle_{E',E}, \qquad \text{pour tout } w \in F.$$

Il vient alors que L_0 est minorée sur le sous-espace vectoriel F, et donc $L_0 = 0$ sur F, puis que $\langle L_0, v \rangle_{E',E} < \alpha < 0$ ce qui est absurde d'après (2.3). Enfin si $\mathcal{L} \in F'$, le corollaire 2.2 permet de prolonger $\mathcal{L}$ en un élément $L \in E'$ avec $L|_F = \mathcal{L}$ de sorte que, v appartenant à F, $\langle \mathcal{L}, v \rangle_{F',F} = \langle L, v \rangle_{E',E}$, ce qui conclut la preuve de (2.2). □

3 Convergence faible

Dans un espace de Banach qui n'est pas un espace dual, comme c'est typiquement le cas de l'espace de Lebesgue L^1, la notion de convergence faible* ne s'applique pas. On lui préférera la notion de convergence faible dont voici la définition dans un espace de Banach général E.

Définition 3.1. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \qquad \text{pour tout } f \in E'.$$

Une limite faible, quand elle existe, est toujours unique comme conséquence du théorème de Hahn-Banach sous forme analytique. En effet, si x et $y \in E$ satisfont $\langle f, x \rangle == \langle f, y \rangle$, alors

$$\|x - y\|_E = \max_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} \langle f, x - y \rangle = 0,$$

ce qui montre effectivement que $x = y$. Par ailleurs, nous avons des propriétés similaires à la convergence faible* résumées dans la proposition suivante dont la démonstration est similaire à celle de la proposition 1.9.

Proposition 3.2. *Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors :*
i) la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans E ;
ii) $\|x\|_E \leq \liminf_n \|x_n\|_E$;
iii) si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Démonstration. Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors pour tout $f \in E'$, $\langle f, x_n \rangle_{E',E} \to \langle f, x \rangle_{E',E}$ et donc la suite numérique $(\langle f, x_n \rangle_{E',E})_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f, x_n \rangle_{E',E}| < \infty \qquad \text{pour tout } f \in E'.$$

Le théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle f, x_n \rangle_{E',E}| < \infty.$$

Or d'après le corollaire 2.3, on a $\sup_{f\in E',\|f\|_{E'}\leq 1} |\langle f, x_n\rangle_{E',E}| = \|x_n\|$, ce qui montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $f \in E'$,

$$\langle f, x_n\rangle_{E',E} = \lim_{n\to+\infty} \langle f, x\rangle_{E',E} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f\|_{E'}\|x_n\|.$$

On divise ensuite par $\|f\|_{E'}$ puis on passe au sup en $f \in E'$, le corollaire 2.3 implique alors que

$$\|x\| = \sup_{f\in E', f\neq 0} \frac{\langle f, x_n\rangle_{E',E}}{\|f\|_{E'}} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|.$$

Enfin, si $f_n \to f$ fortement dans E', alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| &\leq |\langle f_n - f, x_n\rangle_{E',E}| + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E} \\ &\leq \|f_n - f\|_{E'}\|x_n\| + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E}|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E par une constante $M > 0$ (indépendante de n), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle_{E',E} - \langle f, x\rangle_{E',E}| \leq M\|f_n - f\|_{E'} + |\langle f, x_n - x\rangle_{E',E}| \to 0,$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible. Il assure, dans les espaces réflexifs, que toute suite bornée est faiblement séquentiellement relativement compacte.

Théorème 3.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réflexif. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E, i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| < \infty,$$

alors on peut en extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément $x \in E$.

Démonstration. On définit $F = \overline{\mathrm{Vect}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$ qui est un sous-espace vectoriel fermé de E. En vertu de la proposition 2.17, F est réflexif. Il est également séparable puisque l'ensemble D formé de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels est dénombrable et dense dans F. Comme F'' peut être identifié à F via un isomorphisme isométrique $J : F \to F''$, on en déduit que l'ensemble $J(D)$ est dénombrable et dense dans F'', ce qui assure que F'' est séparable. Par suite, F' est également séparable d'après la proposition 2.13.

Notons $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans F. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonale de sous-suite. Comme la suite numérique $(\langle f_0, x_n\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(f_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_0, x_{\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \ldots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(f_0), \ldots, L(f_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \leq j \leq k$,

$$\langle f_j, x_{\sigma_j\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{k+1}, x_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(f_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{k+1}, x_{\sigma_{k+1}\circ\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_0(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_k\circ\cdots\circ\sigma_0(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to L(f_k).$$

Montrons à présent que, pour tout $f \in F$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(f) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\geq n(f)}$ converge. Soit donc $f \in F$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un f_k tel que $\|f - f_k\|_{F'} \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout m, $n \geq k$,

$$\begin{aligned}
|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| &\leq |\langle f - f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F}| \\
&\quad + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| + |\langle f_k - f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \\
&\leq (\|x_{\sigma(n)}\| + \|x_{\sigma(m)}\|)\|f - f_k\|_{F'} + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}|.
\end{aligned}$$

D'après le théorème 3.3, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$ et donc

$$|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \leq 2M\varepsilon + |\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}|.$$

Comme la suite $(\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N_k$, $|\langle f_k, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f_k, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \leq \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout m, $n \geq \max(N_k, k)$,

$$|\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} - \langle f, x_{\sigma(m)}\rangle_{F',F}| \leq (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F})_{n\geq k}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(f)$.

On montre facilement que l'application $f \mapsto L(f)$ est linéaire et comme

$$|L(f)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F}| \leq M\|f\|_{F'},$$

elle est continue et donc $L \in F''$. Par réflexibilité de F'', il existe un $x \in F$ tel que $L(f) = \langle f, x\rangle_{F',F}$. Finalement on a montré l'existence d'une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et d'un élément $x \in F$ tels que $\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to \langle f, x\rangle_{F',F}$. Ceci implique que $x_{\sigma(n)} \rightharpoonup x$ faiblement dans E. En effet, si $f \in E$, alors comme $x \in F$ et $x_{\sigma(n)} \in F$,

$$\langle f, x_{\sigma(n)}\rangle_{E',E} = \langle f|_F, x_{\sigma(n)}\rangle_{F',F} \to \langle f|_F, x\rangle_{F',F} = \langle f, x\rangle_{E',E},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

Le cas qui nous intéressera particulièment ici est celui de $E = L^1(X)$ (dont le dual peut être identifié à $L^\infty(X)$), une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(X)$ converge faiblement vers $f \in L^1(X)$ si

$$\int_X f_n g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^\infty(X).$$

Il est immédiat de voir ici que la limite faible est unique car si f_1 et $f_2 \in L^1(X)$ sont deux limites faibles, on a pour tout $g \in L^\infty(X)$ que

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0,$$

puis en prenant $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|}\mathbf{1}_{\{f_1 \neq f_2\}} \in L^\infty(X)$ que $\|f_1 - f_2\|_{L^1(X)} = 0$, soit $f_1 = f_2$.

Dans l'espace L^1, il n'y a pas d'espoir d'avoir un résultat général de compacité faible, similaire aux théorèmes 1.10 et 3.3, comme cela peut être le cas dans L^p pour $p > 1$.

Exemple 3.4. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $L^1([0,1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

alors on a $\|f_n\|_1 = 1$. Supposons, par l'absurde, que pour une sous-suite toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1([0,1])$. Comme en particulier, $1 \in L^\infty([0,1])$, il vient que

$$1 = \int_0^1 f_n \, dx \to \int_0^1 f \, dx,$$

ce qui montre que $\int_0^1 f \, dx = 1$. Par ailleurs, si I est un intervalle fermé contenu dans $]0,1]$, alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_n = 0$ p.p. sur I, pour tout $n \geq n_0$. En choisissant $g = \chi_I \in L^\infty([0,1])$ comme fonction test, il vient

$$0 = \int_I f_n \, dx \to \int_I f \, dx.$$

En choisissant $I = [1/k, 1]$, on obtient que $\int_{1/k}^1 f \, dx = 0$ pour tout $k \geq 1$, puis par passage à la limite quand $k \to \infty$ et par convergence dominée, $\int_0^1 f \, dx = 0$, ce qui est impossible.

L'obstruction typique à la convergence faible dans L^1 est le fait que les suites ont tendance à se concentrer pour former à la limite une mesure à la place d'une fonction intégrable. Pour éviter de type de phénomène, on introduit la notion suivante d'équi-intégrabilité qui assure que la suite ne se concentre pas sur des ensembles de mesure arbitrairement petite.

Définition 3.5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de mesure finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^1(\Omega)$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équi-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{A}, \ \mathcal{L}^N(A) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n| \, dx \leq \varepsilon.$$

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre d'un ouvert de mesure finie. Si $\mathcal{L}^N(\Omega) = +\infty$ (ce qui est par exemple le cas si $\Omega = \mathbb{R}^N$), il faut de plus s'assurer que la masse de la suite de fonctions ne s'échappe pas à l'infini, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \subset \Omega$ tel que $\mathcal{L}^N(A) < \infty$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega\setminus A} |f_n| \, dx \leq \varepsilon.$$

Le résultat suivant caractérise les suites faiblement convergentes dans L^1.

Théorème 3.6 (Dunford-Pettis). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega) < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'élements de $L^1(\Omega)$.*

(i) Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(\Omega)$ pour une fonction $f \in L^1(\Omega)$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

(ii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, alors il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $f_{\sigma(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(\Omega)$.

Démonstration. Etape 1. Montrons d'abord la condition suffisante. On remarque tout d'abord que pour tout $A \in \mathcal{A}$, la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, dx$$

existe. On désigne par $\mathcal{L}$ la tribu des ensembles Lebesgue mesurable

Soit $E := \{\mathbf{1}_A : \ A \in \mathcal{L}\}$. Montrons que E est un sous ensemble fermé de $L^1(\Omega)$. Soit $(\mathbf{1}_{A_j})_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $\mathbf{1}_{A_j} \to f$ dans $L^1(\Omega)$. Pour une sous-suite, on a $\mathbf{1}_{A_j} \to f$ p.p. dans Ω, ce qui implique que $f(x) \in \{0, 1\}$ pour presque tout $x \in \Omega$. On en déduit que $f \in E$ et donc que E est fermé de $L^1(\Omega)$, ce qui confère à cet espace une structure d'espace métrique.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_k := \left\{ \mathbf{1}_A \in E : \ \sup_{n,l\geq k} \left| \int_\Omega (f_n - f_l)\mathbf{1}_A \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8} \right\}.$$

Montrons que les E_k sont fermés dans E et que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Pour ce faire, on écrit que $E_k = \bigcap_{n,l\geq k} E_{k,n,l}$ où

$$E_{k,n,l} := \left\{ \mathbf{1}_A \in E : \ \left| \int_\Omega (f_n - f_l)\mathbf{1}_A \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8} \right\}.$$

Soit $(\mathbf{1}_{A_j})_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E_{k,n,l}$ telle que $\mathbf{1}_{A_j} \to \mathbf{1}_A$ dans E. Pour une sous-suite on a $\mathbf{1}_{A_j} \to \mathbf{1}_A$ p.p. dans Ω et donc $(f_n - f_l)\mathbf{1}_{A_j} \to (f_n - f_l)\mathbf{1}_A$ p.p. dans Ω. Comme par ailleurs $|(f_n - f_l)\mathbf{1}_{A_j}| \leq |f_n - f_l| \in L^1(\Omega)$, le Théorème de la convergence dominée montre que

$$\left| \int_\Omega (f_n - f_l)\mathbf{1}_A \, dx \right| = \lim_{j\to+\infty} \left| \int_\Omega (f_n - f_l)\mathbf{1}_{A_j} \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8},$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_A \in E_{k,n,l}$ et donc que $E_{k,n,l}$ est fermé. Par suite, E_k est fermé comme intersection de fermés.

Soit $A \in \mathcal{L}$ (donc $\mathbf{1}_A \in E$). Comme par hypothèse la limite $\lim_n \int_A f_n \, dx$ existe, on en déduit que la suite numérique $(\int_A f_n \, dx)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout n, $l \geq k$,

$$\left| \int_A f_n \, dx - \int_A f_l \, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8},$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_A \in E_k$ et donc que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$. Si $\mathring{E}_k = \emptyset$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, le Théorème de Baire impliquerait que $\mathring{E} = \emptyset$ ce qui est absurde. Par conséquent, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{E}_{k_0} \neq \emptyset$. On peut donc trouver $\mathbf{1}_{A_0} \in E_{k_0}$ (avec $A_0 \in \mathcal{L}$) et $\delta' > 0$ tels que $B_E(\mathbf{1}_{A_0}, \delta') \subset E_{k_0}$. Autrement dit, si $A \in \mathcal{L}$, on a

$$\int_\Omega |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_0}| \, dx < \delta' \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{1}_A \in E_{k_0}.$$

Par absolue continuité de l'intégrale de Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $0 \leq n \leq k_0$, il existe $\delta_n > 0$ tel que si $A \in \mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}^N(A) < \delta_n \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f_n| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Posons $\delta := \min\{\delta', \delta_0, \ldots, \delta_{k_0}\} \leq \delta'$ qui satisfait

$$\mathcal{L}^N(A) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \int_A |f_n| \, dx \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{pour tout } 0 \leq n \leq k_0.$$

Soit $A \in \mathcal{L}$ tel que $\mathcal{L}^N(A) < \delta$. Comme

$$\int_\Omega |\mathbf{1}_{A\cup A_0} - \chi_{A_0}|\, dx = \mathcal{L}^N((A \cup A_0) \setminus A_0) \leq \mathcal{L}^N(A) < \delta' \leq \delta$$

et

$$\int_\Omega |\mathbf{1}_{A_0\setminus A} - \mathbf{1}_{A_0}|\, dx = \mathcal{L}^N(A_0 \setminus (A_0 \setminus A)) \leq \mathcal{L}^N(A) < \delta' \leq \delta,$$

on en déduit que $\mathbf{1}_{A\cup A_0} \in B_E(\mathbf{1}_{A_0}, \delta')$ et $\mathbf{1}_{A_0\setminus A} \in B_E(\mathbf{1}_{A_0}, \delta')$, ce qui montre que $\mathbf{1}_{A\cup A_0}$ et $\mathbf{1}_{A_0\setminus A} \in E_{k_0}$. Pour tout $n \geq k_0$, on a donc

$$\left| \int_{A\cup A_0} (f_n - f_{k_0})\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}, \quad \left| \int_{A_0\setminus A} (f_n - f_{k_0})\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Par ailleurs, comme $A = (A_0 \cup A) \setminus (A_0 \setminus A)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\left| \int_A f_n\, dx \right| &\leq \left| \int_A f_{k_0}\, dx \right| + \left| \int_A (f_n - f_{k_0})\, dx \right| \\ &\leq \int_A |f_{k_0}|\, dx + \left| \int_{A\cup A_0} (f_n - f_{k_0})\, dx \right| + \left| \int_{A_0\setminus A} (f_n - f_{k_0})\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Enfin en décomposant $f_n = f_n^+ - f_n^-$ avec $f_n^+ = \max\{f_n, 0\}$ et $f_n^- = -\min\{f_n, 0\}$ et en appliquant l'inégalité précécente en remplaçant A par $A \cap \{f_n \geq 0\}$ et $A \cap \{f_n < 0\}$, on obtient que

$$\int_A f_n^+\, dx = \int_{A\cap\{f_n\geq 0\}} f_n\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_A f_n^-\, dx = -\int_{A\cap\{f_n<0\}} f_n\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_A |f_n|\, dx = \int_A (f_n^+ + f_n^-)\, dx \leq \varepsilon$$

ce qui établit l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Etape 2. On montre à présent la condition suffisante. En décomposant $f_n = f_n^+ - f_n^-$ avec $f_n^+ = \max\{f_n, 0\}$ et $f_n^- = -\min\{f_n, 0\}$, on constate que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable alors $(f_n^\pm)_{n\in\mathbb{N}}$ le sont également. Par conséquent, on ne restreint pas la généralité en supposant que $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega)$, d'après l'inégalité de Markov, il existe une constante $C > 0$ indépendante de n et k telle que

$$\mathcal{L}^N(\{f_n > k\}) \leq \frac{1}{k}\|f_n\|_1 \leq \frac{C}{k} \quad \text{pour tout } n, k \in \mathbb{N}.$$

Soient ε et δ donnés par la définition de l'équi-intégrabilité de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe k_0 qui ne dépend que de δ (et donc ε) tel que $C/k \leq \delta$ pour tout $k \geq k_0$. On a alors $\mathcal{L}^N(\{f_n > k\}) \leq \delta$ et donc, par équi-intégrabilité,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{f_n>k\}} |f_n|\, dx \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } k \geq k_0,$$

ce qui montre que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{f_n>k\}} |f_n|\, dx \to 0$$

quand $k \to +\infty$. Si $g_n^k = f_n \mathbf{1}_{\{f_n \le k\}}$, on a donc

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega |f_n - g_n^k|\, dx = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{f_n > k\}} |f_n|\, dx \to 0$$

quand $k \to +\infty$.

Comme, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la suite $(g_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, elle admet une sous-suite qui converge faible* dans $L^\infty(\Omega)$. En utilisant un procédé d'extraction diagonale, on peut trouver une extraction $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (indépendante de k) et une fonction $g^k \in L^\infty(\Omega)$ telles que $g^k_{\sigma(n)} \rightharpoonup g^k$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$, i.e., pour tout $\varphi \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega g^k_{\sigma(n)} \varphi\, dx \to \int_\Omega g^k \varphi\, dx.$$

En particulier, comme Ω est borné, pour tout $\psi \in L^\infty(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega g^k_{\sigma(n)} \psi\, dx \to \int_\Omega g^k \psi\, dx,$$

ce qui montre que $g^k_{\sigma(n)} \rightharpoonup g^k$ faiblement dans $L^1(\Omega)$. En prenant $\psi = 1 \in L^\infty(\Omega)$ comme fonction test, il vient

$$\int_\Omega g^k dx = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g^k_{\sigma(n)}\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_{\sigma(n)}\, dx \le C,$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de k. Par ailleurs, comme $g^k_{\sigma(n)} \le g^{k+1}_{\sigma(n)}$ pour tout k, $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que pour tout $\psi \in L^\infty(\Omega)$ avec $\psi \ge 0$,

$$\int_\Omega g^k_{\sigma(n)} \psi\, dx \le \int_\Omega g^{k+1}_{\sigma(n)} \psi\, dx,$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$

$$\int_\Omega g^k \psi\, dx \le \int_\Omega g^{k+1} \psi\, dx,$$

ce qui montre que $g^k \le g^{k+1}$ p.p. dans Ω. Par convergence monotone, on en déduit que $f = \sup_k g^k \in L^1(\Omega)$ et $g^k \to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Soit $\psi \in L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega (f_{\sigma(n)} - f)\psi\, dx \right| &\le \left| \int_\Omega (f_{\sigma(n)} - g^k_{\sigma(n)})\psi\, dx \right| + \left| \int_\Omega (f - g^k_{\sigma(n)})\psi\, dx \right| \\ &\le \|\psi\|_\infty \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_p - g_p^k\|_1 + \left| \int_\Omega (f - g^k_{\sigma(n)})\psi\, dx \right| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \left| \int_\Omega (f_{\sigma(n)} - f)\psi\, dx \right| &\le \|\psi\|_\infty \sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_p - g_p^k\|_1 + \left| \int_\Omega (f - g^k)\psi\, dx \right| \\ &\le \|\psi\|_\infty \left(\sup_{p\in\mathbb{N}} \|f_p - g_p^k\|_1 + \|g^k - f\|_1 \right), \end{aligned}$$

puis par passage à la limite quand $k \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_{\sigma(n)} - f)\psi\, dx = 0$$

ce qui montre que $f_{\sigma(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(\Omega)$. $\square$

Remarquons toutefois que l'espace $L^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{M}(\Omega)$ en identifiant $f \in L^1(\Omega)$ avec la mesure $\mu = f\mathcal{L}^N$. Par conséquent, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de fonctions dans $L^1(\Omega)$, alors il existe une sous-suite extraite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega g \, d\mu.$$

Notons si Ω est borné et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et le Théorème de Radon-Nikodým assure l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $\mu = f\mathcal{L}^N$. Dans ce cas, on en déduit que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega fg \, dx.$$