TD5. Produit de Convolution - Transformée de Fourier

Exercice 1. Montrer que la convolution d'une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ et d'une fonction de $L^\infty(\mathbb{R})$ est une fonction continue. Exemple : calculer $1_{[0,1]} * 1_{[0,1]}$.

Exercice 2. Soit H la fonction de Heaviside : $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t \geq 0$. On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) := H(t) - 2H(t-1) + H(t-2) \quad \text{et} \quad g(t) = 1_{\mathbb{R}}(t) = 1.$$

Montrer que les expressions suivantes ont un sens et calculer leur valeurs

$$H * (f * g) \quad \text{et} \quad (H * f) * g.$$

Exercice 3. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération $*$. (Indication : on pourra considérer la convolution par la fonction $\mathbb{1}_{[0,1]}$.)

Exercice 4. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $f * g$ est définie λ_d-p.p, que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$, et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Exercice 5. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\lim\limits_{|x| \to +\infty} g(x) = 0$. Montrer que $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Le résultat subsiste-t-il si l'on enlève le contrôle de g en l'infini ?

Exercice 6. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On définit la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx,$$

où $\cdot$ désigne le produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

a) Montrer que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ (c'est-à-dire est une fonction continue qui tend vers 0 en ∞).

b) Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$.

c) En déduire (de nouveau) que $L^1(\mathbb{R}^d)$ n'a pas d'élément neutre pour l'opération $*$.

Exercice 7. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on note $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx$ sa transformée de Fourier.

a) Montrer que $\hat{f}$ est continue.

b) Montrer que $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.

c) Montrer que pour tout $\xi \neq 0$, on a $2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \{f(x) - f(x - \pi/\xi)\} e^{-ix\xi} dx$. En déduire que $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

Exercice 8.

a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x f(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable et que

$$(\hat{f})'(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-i\xi x} dx\,.$$

b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{(f')}(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi)$. (On montrera d'abord que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ existent, puis on calculera l'intégrale $\widehat{(f')}$ par parties).

c) Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f^{(n)}}(\xi) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$.

d) Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme et $D = -i\frac{\partial}{\partial x}$. On note $P(D)$ le polynôme différentiel obtenu en remplaçant X par D. Montrer que $(\widehat{P(D)f})(\xi) = P(\xi)\hat{f}(\xi)$.

Exercice 9. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $H(t) = e^{-|t|}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} H(t/n)e^{itx}dt$.

a) Montrer qu'il existe $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ positive, telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 1$ et $h_n(x) = n\varphi(nx)$.

b) En déduire que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $f * h_n \longrightarrow f$ presque partout. (*Indication :* on pourra supposer d'abord que f est continue à support compact).

c) Montrer que, si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * h_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} H(t/n)\hat{f}(t)e^{itx}dt$ pour p.t. $x \in \mathbb{R}$.

d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et soit g définie par $g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}dt$. Montrer que $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et que $f = g$ presque partout.

Exercice 10. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto u_t(x)$ une fonction, qui va décrire la température en un point x au temps t. Supposons que u soit régulière (de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x), que $u_0 = \varphi$, et que u_t, u_t', $u_t'' \in L^1(\mathbb{R})$ pour tout t (où $'$ désigne la dérivée par rapport à x). Notons $\hat{u}_t(\xi)$ la transformée de Fourier de $x \mapsto u_t(x)$. L'*équation de la chaleur* est l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t}u_t(x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_t(x)\,. \tag{1}$$

a) Montrer que, si $\int_{\mathbb{R}} x^2\,|u_t(x)|\,dx < +\infty$, alors $\hat{u}_t(\xi)$ est deux fois dérivable en ξ.

b) Montrer que la transformée de Fourier de $u_t''(x)$ est égale à $-\xi^2\hat{u}_t(\xi)$.

c) En déduire qu'après transformation de Fourier, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}_t(\xi) = -\frac{\xi^2}{2}\hat{u}_t(\xi) \tag{2}$$

et montrer que la solution de cette équation est $\hat{u}_t(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)e^{-\xi^2 t/2}$. On démontrera ou on admettra que $e^{-\xi^2 t/2}$ est la transformée de Fourier de la fonction $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$.

d) Montrer que la solution de l'équation de la chaleur s'écrit

$$u_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}}\,dy\,. \tag{3}$$