TD4. Espaces de Lebesgue

Exercice 1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soient f et g deux fonctions mesurables positives de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ telles que $fg \geq 1$. Montrer que $\int_X f\, d\mu \int_X g\, d\mu \geq \mu(X)^2$.

b) On suppose qu'il existe une fonction intégrable $f : X \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $1/f$ soit intégrable. Que peut-on dire de la mesure μ ?

Exercice 2.

a) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $f \in L^1(\mu)$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives de $L^1(\mu)$ convergeant presque partout vers f, et telle que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. Montrer que (f_n) converge vers f dans $L^1(\mu)$. (*Indication* : on pourra considérer $g_n = \min(f, f_n)$.)

b) Soit $f_n \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ définie par $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[} - n\mathbb{1}_{]-1/n,0[}$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge p.p. vers 0 et que $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\lambda = 0$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle vers 0 dans $L^p(\lambda)$ $(p \geq 1)$?

Exercice 3. Soient $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $p \leq q$. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse finie.

a) Montrer que l'injection canonique $i : L^q(\mu) \to L^p(\mu)$ est une application linéaire continue.

b) Calculer sa norme.

Exercice 4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que si $f \in L^p(\mu) \cap L^q(\mu)$, alors $f \in L^r(\mu)$ pour tout $r \in [p, q]$ et que
$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}.$$
où $\alpha \in [0, 1]$ est défini par $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

b) Montrer que si $f \in L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$, alors
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

c) Soit $f \in L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$ et telle que $\|f\|_{L^p} \to \infty$ quand $p \to \infty$. Montrer que $f \notin L^\infty(\mu)$.

d) Soit $f \in L^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty)$ et telle que $f \notin L^\infty(\mu)$. Montrer que $\|f\|_{L^p} \to \infty$ quand $p \to \infty$.

Exercice 5. Soit $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions de $L^1(\mu)$ qui converge presque partout vers $f \in L^1(\mu)$.

a) Soit $g_n = 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $g_n \geq 0$.

b) Montrer que f_n converge vers f dans $L^p(\mu)$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. (*Indication* : appliquer le lemme de Fatou à la fonction g_n.)

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $p \in [1, +\infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si, pour tout $g \in L^q(\mu)$, $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g\, d\mu = \int_X fg\, d\mu$.

a) Montrer que la convergence dans $L^p(\mu)$ entraîne la convergence faible.

b) Par la suite, on se place dans $([0, 1], \mathcal{B}[0, 1], \lambda)$ et on suppose $1 < p < +\infty$. Soient $f_n(x) = e^{inx}$ et $\varphi \in C_c^\infty(0, 1)$; montrer que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \varphi\, d\mu = 0$.

c) Soient $g \in L^q(0,1)$, $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$ arbitraires. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} \left|\int_0^1 g(x)e^{inx}\,dx\right| \leq \int_0^1 |g(x)-\varphi(x)|\,dx$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers zéro dans $L^p(0,1)$.

d) La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge-t-elle aussi faiblement dans $L^1(0,1)$?

Exercice 7. Soit $p \in]1,+\infty[$. À toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, on associe la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$.

a) Montrer que F est bien définie.

b) On suppose que $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}_+)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = -p\int_0^{+\infty} xF(x)^{p-1}F'(x)\,dx$, puis que $\int_0^{+\infty} F(x)^p\,dx = \frac{p}{p-1}\int_0^{+\infty} f(x)F(x)^{p-1}\,dx$.

c) En déduire l'*inégalité de Hardy* pour $f \in C_c(\mathbb{R}_+^*;\mathbb{R}_+)$:

$$\|F\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}.$$

d) Démontrer l'inégalité de Hardy pour les fonctions de $L^p(\mathbb{R}_+)$.

e) Montrer que $\frac{p}{p-1}$ ne peut être remplacé par une constante plus petite. (*Indication* : on pourra considérer $f_A(x) = \mathbb{1}_{[1,A]}(x)x^{-1/p}$.)

Exercice 8. On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ et un exposant $1 \leq p < \infty$. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction, on définit la translation de f de vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ par

$$\tau_h f(x) := f(x+h) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\tau_h f \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\|h\| \to 0$.

b) En déduire que ce résultat reste vrai si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 9. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $f : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction dans $L^1(\mu)$.

a) En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $\mu(\{f>0\}) < 1$, alors $\|f\|_p \to 0$ quand $p \to 0$.

b) Etablir que

$$\lim_{p\to 0}\int_X f^p\,d\mu = \mu(\{f>0\}).$$

c) Montrer que pour tout $p \in]0,1[$ et pour tout $y \in]0,+\infty[$, alors

$$\frac{|y^p - 1|}{p} \leq y + |\log y|.$$

d) A partir de maintenant, on suppose que $f > 0$ sur X et que $\log f \in L^1(\mu)$. Montrer que

$$\lim_{p\to 0}\int_X \frac{f^p - 1}{p}\,d\mu = \int_X \log f\,d\mu.$$

e) En déduire que

$$\lim_{p\to 0}\|f\|_{L^p} = \exp\left(\int_X \log f\,d\mu\right).$$