TD2. Mesures produit et théorème de Fubini.

Exercice 1. **A.** Soit $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \lambda_d)$ et $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda_1)$ et soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction positive et intégrable. On définit les ensembles suivants :

$$E_*(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\},$$

$$E^*(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}.$$

a) Montrer que $E_*(f)$ et $E^*(f)$ sont $\lambda_d \otimes \lambda_1$-mesurables.
b) Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers f. Montrer que $(\lambda_d \otimes \lambda_1)(E_*(f_n)) \nearrow (\lambda_d \otimes \lambda_1)(E_*(f))$. En déduire que

$$(\lambda_d \otimes \lambda_1)(E_*(f)) = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\lambda_d.$$

c) En déduire que

$$(\lambda_d \otimes \lambda_1)(E^*(f)) = \int_{\mathbb{R}^d} f \mathrm{d}\lambda_d.$$

d) En déduire que le graphe de f est de mesure nulle.

B. Montrer que le graphe de toute fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$ est de mesure nulle.

C. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini.

Exercice 2. Soit $B \subset \mathbb{R}^2$. On définit l'ensemble $t(B) = \{x_1 \in \mathbb{R} / (x_1, 0) \in B\}$ et on considère

$$T = \{B \subset \mathbb{R}^2 / t(B) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}.$$

a) Montrer que T est une tribu contenant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.
Dans la suite, on suppose que $B = A \times \{0\}$, où A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que $B \notin \mathscr{B}(\mathbb{R}^2)$.
c) Soit $\theta \in]0, \pi/2[$ et ρ la rotation d'angle θ : pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\rho(x_1, x_2) = (x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta, x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta).$$

Notant 1_B la fonction indicatrice de B, on pose $f = 1_B \circ \rho$. Montrer que f n'est pas borélienne mais que les fonctions $f(., x_2)$, $f(x_1, .)$ sont fonctions boréliennes d'une variable.

Exercice 3. a) Montrer que $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathscr{P}(\mathbb{N}) = \mathscr{P}(\mathbb{N}^2)$.
b) Soit μ la mesure comptage de $\mathbb{N}$. Montrer que $\mu \otimes \mu$ est la mesure comptage de $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4. Soient μ et ν deux mesures σ-finies définies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Montrer que l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) > 0\}$ est dénombrable.
b) Montrer que $(\mu \otimes \nu)(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})\nu(\{x\})$ où Δ est la diagonale de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit $f : [0,1] \to [0,+\infty[$ borélienne et $A \subset \mathbb{R}^3$ l'ensemble

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,1], y^2 + z^2 \leq f(x)\}.$$

a) Prouver que l'application

$$F : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) = y^2 + z^2 - f(x)$$

est borélienne et en déduire que $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^3)$.
b) Pour tout $x \in [0,1]$ déterminer la section $A_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\}$ et calculer sa mesure.
c) Calculer le volume de A en fonction de f.
d) Vérifier que $Vol(A) = \pi/3$ si $f = x^2$.

Exercice 6. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, par exemple $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. On notera simplement $\mathrm{d}t$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

a) Soit $u : X \to [0,+\infty[$ une fonction positive et mesurable. Montrer que

$$\int_X u \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\})\mathrm{d}t.$$

b) Plus généralement, soit $p \geq 1$ et $u : X \to [0,+\infty]$ une fonction positive mesurable. Montrer que

$$\int_X u^p \,\mathrm{d}\mu = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(\{x \in X : u(x) \geq t\})\mathrm{d}t.$$

Exercice 7. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace probabilisé. Soit f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}, \mu)$ vérifiant $fg \in L^1(\mathbb{R}, \mu)$ et monotones de même sens. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f d\mu \int_{\mathbb{R}} g d\mu.$$

(Indication : considérer la fonction $\varphi(x,y) = (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)))$

Exercice 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^2$ par $f(x,y) = \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f est intégrable. Calculer alors son intégrale.

Exercice 9.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
b) Soit $a > 0$. Montrer que $\int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^a e^{-xt} \sin x dx \right) dt$.
c) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.
d) Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10.

a) Calculer de deux façons différentes $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}$ pour obtenir la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.
b) En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.