TD1. Tribus, classes monotones, mesures

Exercice 1. Montrer qu'une intersection quelconque de tribus sur un ensemble donné est une tribu. Est-ce le cas avec l'union ?

Exercice 2. Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ et $\mathcal{B}$ une tribu sur F. Montrer que

$$\mathcal{A} = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu sur E.

Exercice 3. Les classes suivantes sont-elles des classes monotones ? Des tribus ?

a) L'ensemble des unions finies disjointes d'intervalles du type $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ (on pose $]a, +\infty] =]a, +\infty[$). L'ensemble $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}),\ A \text{ est au plus dénombrable}\} \cup \{\mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ \mathrm{card}(A) < +\infty\} \cup \{\mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{N}$.

c) L'ensemble des disques ouverts de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des unions finies de convexes de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

d) L'ensemble des compacts d'un espace métrique.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble, $\mathcal{B}$ une tribu sur Ω, P_1 et P_2 deux mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{B})$. Montrer que $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}\,, P_1(A) = P_2(A)\}$ est une classe monotone.

Exercice 5. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Sa fonction de répartition F est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \mu(]-\infty, x])\,.$$

a) Montrer que F est croissante, continue à droite, et que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$, et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
On note $F(x-) = \lim_{y\to x,\, y<x} F(y)$. Montrer que

b) $\mu(]a, b]) = F(b) - F(a)$ si $-\infty < a < b < +\infty$.

c) $\mu([a, b]) = F(b) - F(a-)$ si $-\infty < a \leq b < +\infty$.

d) $\mu(]a, b[) = F(b-) - F(a)$ si $-\infty < a < b \leq +\infty$.

e) $\mu([a, b[) = F(b-) - F(a-)$ si $-\infty < a < b \leq +\infty$.

Exercice 6.

a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs de somme 1. Montrer que $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \sum_{n:\, a_n\in A} b_n$ est une mesure de probabilité sur la tribu discrète.

b) On note $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\delta_{a_n}$ cette mesure que l'on restreint à la tribu borélienne. Calculer la fonction de répartition de la probabilité et étudier ses points de discontinuités.

c) Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1-p$. Quelle est la fonction de répartition de la mesure $\sum_{n\geq1} q^{n-1}p\,\delta_n$?

Exercice 7. Soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu([-n, n]) < +\infty$. On définit sa fonction de répartition généralisée G par

$$G(x) = \begin{cases} -\mu(]x, 0[) \text{ si } x < 0 \\ \mu([0, x]) \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que G est une fonction croissante, continue à droite, vérifiant $G(0-) = 0 \leq G(0)$ et étudier l'analogue des propriétés de la fonction de répartition d'une probabilité.

b) Si μ est une probabilité, quel est le lien entre G et sa fonction de répartition F ?

Exercice 8. Montrer qu'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ est caractérisée par sa fonction de répartition.