TD 8. Mesures. Mesure de Lebesgue. Intégrale des fonctions positives.

Échauffements

Exercice 1. Soit a un réel. On note δ_a la mesure de Dirac en a sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, définie par, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et 0 sinon. Pour toute fonction mesurable positive $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, déterminer $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\delta_a$.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ une mesure non nulle et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tout $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

⋆ **Exercice 3.** On considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que λ est σ-finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles mesurables tels que $\mathbb{R} = \bigcup_{n\geq 1} E_n$ et $\lambda(E_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}$, $\lambda(K) < +\infty$.

c) Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il forcément borné ?

Mesures

⋆**Exercice 4.** Soit $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels strictement positifs tels que $\sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \alpha_k \leq 1$. L'ensemble de Cantor associé à cette suite est défini de la manière suivante : on pose $A_0 = [0, 1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} s'obtient de A_n en retranchant, de chacun des 2^n intervalles le composant, un intervalle ouvert, centré, de longueur α_n. On définit alors l'ensemble de Cantor par $K = \bigcap_{n\geq 0} A_n$. En particulier, l'ensemble triadique de Cantor est obtenu pour la suite $\alpha_n = \frac{1}{3^{n+1}}$, $n \geq 0$.

a) Calculer la mesure de Lebesgue de K. En déduire que l'ensemble triadique de Cantor est d'intérieur vide.

b) Montrer que K est toujours d'intérieur vide. Comparer la mesure de K à celle de son intérieur.

⋆ **Exercice 5.** Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, telle que μ soit finie sur les compacts de $\mathbb{R}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a, t[), & \text{si } t > a, \\ -\mu([t, a[), & \text{si } t \leq a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.

Exercice 6. En utilisant l'exercice 4, montrer qu'il est possible de construire un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue 5. Proposer également une méthode directe.

Intégration

⋆ **Exercice 7.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to [0, +\infty]$ une fonction étagée positive. On définit pour tout $A \in \mathcal{A}$,

$$\mu_f(A) = \int_X f \mathbb{1}_A \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que μ_f est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

⋆ **Exercice 8.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, g : X \to [0, +\infty]$ des applications mesurables et positives. Montrer que :

a) Pour tout $a > 0$, $\mu(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_X f \mathrm{d}\mu$.

b) Si $\int_X f \mathrm{d}\mu < +\infty$, alors f est finie μ-p.p.

c) $\int_X f \mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si f est nulle μ-p.p.

d) Si $f = g$ μ-p.p., alors $\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu$;