TD7. Mesures.

Échauffements

⋆ **Exercice 1.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(Y, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ mesurable. Montrer que $\mu_f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B & \mapsto & \mu(f^{-1}(B)) \end{array} \right.$ est une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$.

Exercice 2. On considère la tribu $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ A \text{ est dénombrable ou } {}^cA \text{ est dénombrable}\}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mu : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ A & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon}\,; \end{cases} \end{array} \right.$ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

⋆ **Exercice 3.** Dans cet exercice on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il nécessairement borné ?

Quelques exercices classiques

⋆ **Exercice 4.**

a) Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de mesures positives sur $\mathcal{A}$ (pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$). Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \mu_j(A)$. Montrer que μ est une mesure.

b) Sur l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, on définit, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\nu_j(A) = \text{card}(A \cap [j, +\infty])$. Montrer que pour tout $j \in \mathbb{N}$ ν_j est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu_j(A) \geq \nu_{j+1}(A)$.

c) Soit ν l'application positive définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\nu(A) = \inf_{j\in\mathbb{N}} \nu_j(A)$ pour toute partie A de $\mathbb{N}$. Déterminer $\nu(\mathbb{N})$ et $\nu(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dire si ν est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On suppose que $A \in \mathcal{A}$ est un atome de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire que A est non vide et pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $B \subseteq A$, alors $B = \emptyset$ ou $B = A$. Montrer que $\mu_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \to & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ B & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } A \subseteq B \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array} \right.$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

⋆ **Exercice 6.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{|f| \leq n\}$. Montrer que, si $\mu(X) \neq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_n) \neq 0$.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mu(A) \neq 0$ et pour tout $x \in A$, $|f(x)| \geq \varepsilon$.

⋆ **Exercice 7.** [Lemme de Borel-Cantelli] Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) < +\infty\,.$$

Montrer que $\mu\left(\limsup_n A_n\right) = 0$.

⋆ **Exercice 8.** Soient μ une mesure finie sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \mu([x, +\infty[)$.

a) Montrer que F est décroissante et continue à gauche sur $\mathbb{R}$ et calculer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que F est continue en x si et seulement si $\mu(\{x\}) = 0$.
En déduire que $\{x \in \mathbb{R} : \mu(\{x\}) \neq 0\}$ (l'ensemble des atomes de μ) est dénombrable.

Pour aller plus loin. . .

Exercice 9. [Théorème d'Egoroff] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

a) Montrer que l'ensemble de convergence C de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est mesurable.

b) On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers une fonction mesurable f, au sens où $\mu({}^cC) = 0$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, soit $E_n^k = \bigcap_{i\geq n} \{|f_i - f| \leq \dfrac{1}{k}\}$.
Montrer que $C \subseteq \bigcup_{n\geq 1} E_n^k$. En déduire que, pour tout réel $\varepsilon > 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_{k,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu\left({}^cE^k_{n_{k,\varepsilon}}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}$.

c) (Théorème d'Egoroff) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tel que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur E_ε et tel que $\mu({}^cE_\varepsilon) < \varepsilon$.

d) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 10. [Application du théorème d'Egoroff] Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge en mesure* vers f si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_n \mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) = 0.$$

a) Montrer que si $\mu(X) < +\infty$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-p.p. vers f, alors elle converge en mesure vers f.

b) Réciproquement, supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en mesure vers f :

 i) Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\forall k \geq 1,\ \mu\left(\left\{|f_{n_k} - f| > \frac{1}{k}\right\}\right) < \frac{1}{k^2}.$$

 ii) Soit $A = \varliminf_k \{|f_{n_k} - f| \leq \frac{1}{k}\}$. Montrer que $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ converge vers f sur A et que $\mu({}^cA) = 0$ (en d'autres termes, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge μ-p.p. vers f).