TD5. Fonctions en escalier, fonctions étagées, fonctions réglées, fonctions boréliennes.

Remarque 1 *Pour rappel, une fonction définie sur un segment est réglée, c'est-à-dire limite uniforme de fonctions en escalier, si et seulement si elle admet une limite à droite et à gauche en tout point. Ce critère pourra être utilisé pour tous les exercices suivants, et sa preuve fait l'objet du dernier exercice.*

Échauffements

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = x$.

a) Décrire la tribu image réciproque de $\mathcal{B}$ par f, $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}$, où $\mathcal{B}$ est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

b) Décrire la tribu image directe par f de la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire $\{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}^2\}$ avec $\mathcal{B}^2$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est mesurable si et seulement si pour tout couple de réels (a, b), la restriction de f à $[a, b]$ est mesurable.

Fonctions réglées

⋆ **Exercice 3.**

a) Donner un exemple de fonction étagée qui n'est pas réglée.

b) Existe-t-il une suite de fonctions en escalier qui converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Fonctions mesurables

⋆ **Exercice 4.** Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $f_n : E \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \{x \in E : \text{la suite } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

est un élément de $\mathcal{A}$.

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soient f et g deux fonctions réelles sur E qui sont $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-mesurables. Montrer que $f + g$ est mesurable.

⋆ **Exercice 6.** Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X et Y sont munis de leur tribu borélienne).

⋆ **Exercice 7.** Soit $f : E \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\mathcal{A}_f = f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la tribu image réciproque de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ par f.

a) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que $g = h \circ f$ est une fonctions mesurable de $(E, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

b) Soit $s : (E, \mathcal{A}_f) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction étagée. Montrer qu'il existe une fonction borélienne t telle que $s = t \circ f$.

c) Montrer que si $g : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ est mesurable, alors il existe h borélienne telle que $g = h \circ f$. Indication : *On pourra approcher g par une suite de fonctions étagées.*

Exercice 8.

a) Soit X un borélien de $\mathbb{R}$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est mesurable.

b) Montrer que toute fonction réglée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est borélienne.

⋆ **Exercice 9.**

a) L'application $a = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{n}\}} : [0,1] \to \mathbb{R}$ est-elle une fonction réglée ? Étagée ? Borélienne ?

b) Qu'en est-il de l'application $b = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]} : [0,1] \to \mathbb{R}$?

c) Répondre aux mêmes questions, concernant les applications suivantes (depuis $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$).

$c = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$; $\quad d = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} \mathbb{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}$; $\quad e(x) = \frac{1}{x} d(x)$ si $x \in]0,1]$, $= 0$ si $x = 0$;

$f(x) = x d(x)$; $\quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} d(x)$ si $x \in]0,1]$, $= 0$ si $x = 0$.

Pour aller plus loin... Un exercice classique

Exercice 10. Montrer qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si et seulement si elle admet en tout point de $]a,b[$ une limite à gauche et une limite à droite.