TD4. Tribus.

Échauffements

⋆ **Exercice 1.** Soit X un ensemble. Donner des conditions sur X pour que les classes suivantes soient des tribus.

a) $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$.

b) $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$.

c) $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{x\}, X\}$ où $x \in X$.

d) $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{x\}, {}^c\{x\}, X\}$ où $x \in X$.

e) La classe des parties finies de X.

f) La classe des parties dénombrables de X.

g) La classe des parties finies ou cofinies de X.

h) La classe des parties dénombrables ou codénombrables de X.

Exercice 2.

a) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ des classes de parties de E telles que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{B})$.

b) Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas en général une tribu.

c) Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus sur E. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma(\{A \cup B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}) = \sigma(\{A \cap B \mid A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}).$$

Tribus engendrées

⋆ **Exercice 3.** Soit E un ensemble.

a) Décrire la tribu engendrée par la classe $\mathcal{S}$ des singletons de E.

b) Décrire la tribu engendrée par la classe $\mathcal{F}$ des parties finies de E.

c) Décrire et donner le cardinal de la tribu engendrée par une partition finie de E.

d) Même question pour une partition infinie dénombrable.

Exercice 4. Soit E un ensemble et $A \subseteq E$. On définit la classe $\mathcal{C} = \{B \subseteq E : A \subseteq B\}$.

a) Caractériser $\sigma(\mathcal{C})$.

b) Donner des conditions sur A pour que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{P}(E)$ (tribu triviale).

c) Donner des conditions sur A pour que $\sigma(\mathcal{C}) = \{\varnothing, E\}$ (tribu grossière).

Tribus et fonctions

Exercice 5. Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) | A = f^{-1}(f(A))\}$ est une tribu sur X.

⋆ **Exercice 6.** Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer par un contre-exemple que la classe des images directes $\{f(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$ n'est en général pas une tribu sur Y.

Exercice 7. Soient $(Y_i, \mathcal{B}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces mesurables. Soit Y un ensemble et $f_i : Y \to Y_i$ des fonctions. On note $\mathcal{B}$ la tribu engendrée par la famille des fonctions $(f_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire la plus petite tribu pour laquelle les f_i sont mesurables. Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{B})$ est mesurable si et seulement si pour tout $i \in I$, $f_i \circ f : (E, \mathcal{A}) \to (Y_i, \mathcal{B}_i)$ est mesurable.

Tribus sur $\mathbb{R}$

⋆ **Exercice 8.** Une partie $A \subseteq \mathbb{R}$ est dite symétrique si $A = -A$, où $-A = \{x \in \mathbb{R} : \exists y \in A, x = -y\}$. Soit $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : A = -A\}$ l'ensemble des parties symétriques de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathcal{A} = \{A \cup (-A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\}$.

b) Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu de $\mathbb{R}$.

c) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

d) Caractériser les fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$.

e) Montrer que $\mathcal{A}$ est la tribu image réciproque de la tribu grossière $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ par la fonction valeur absolue $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

f) Décrire la tribu engendrée par $\{\{a, -a\} : a \in \mathbb{R}\}$.
Indication : *On pourra commencer par montrer qu'elle est incluse dans $\mathcal{A}$ ainsi que dans la tribu engendrée par les singletons.*

Pour aller plus loin...

Exercice 9. On souhaite montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit donc X un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu dénombrable sur X. On va montrer que X est finie. Pour tout $x \in X$, soit $A(x) = \bigcap_{x\in A, A\in\mathcal{A}} A$.

a) Montrer que $A(x) \in \mathcal{A}$.

b) Montrer que $A(x)$ est le plus petit élément de $\mathcal{A}$ contenant x.

c) Montrer que $y \in A(x) \Rightarrow A(y) = A(x)$.

d) Soit x et x' deux éléments de X. Montrer que $A(x) = A(x')$ ou bien $A(x) \cap A(x') = \varnothing$.

e) Soit $\mathcal{E} = \{B \subseteq X \mid \exists x \in X, B = A(x)\}$. Montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

f) En déduire que toute tribu dénombrable est finie.

Le coin du curieux. Dans les exercices au programme, trouver la tribu engendrée par une classe $\mathcal{C}$ de parties d'un ensemble E se fait généralement en ajoutant à $\mathcal{C}$ les unions dénombrables et les complémentaires des parties de $\mathcal{C}$. Si l'on obtient ainsi une tribu, on a bien trouvé la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$. Manque de chance, cela ne marche pas toujours, notamment pour le cas de la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$. Si l'on procède de la sorte en partant des intervalles réels, on ne tombe en effet pas sur une tribu. Il faut en fait itérer ce processus par récurrence transfinie pour obtenir la tribu des boréliens. Cela explique pourquoi il est impossible de fournir une description explicite complète des boréliens de $\mathbb{R}$. On peut montrer que la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ a la puissance du continu, ce qui montre l'existence de non-boréliens (car $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a une puissance strictement supérieure à celle du continu).