TD1. Opérations ensemblistes.

Une étoile indique un exercice important.

Échauffements

Exercice 1. Soit X un ensemble. Soient A, B, C, D des parties de X. On rappelle que l'on note $A \triangle B$ la différence symétrique de A et B, c'est-à-dire la partie

$$A \triangle B = (A \cup B) \smallsetminus (A \cap B) = (A \smallsetminus B) \cup (B \smallsetminus A)$$

de X. Calculer $A \triangle \varnothing$, $A \triangle X$ et $A \triangle A$, puis montrer les égalités suivantes :

a) $(A \smallsetminus B) \cap (C \smallsetminus D) = (A \cap C) \smallsetminus (B \cup D)$,

b) $(A \cup B) = (A \triangle B) \triangle (A \cap B)$,

c) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

Exercice 2. Soient X et Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$ une application. Que pensez-vous des assertions suivantes ?

a) L'application f est injective si et seulement s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

b) L'application f est surjective si et seulement s'il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_Y$.

Images directes et réciproques

⋆ **Exercice 3.** Soient X et Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$ une application.

a) Soit $A \subseteq X$. Montrer que $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est injective.

b) Montrer que si pour tout sous-ensemble A de X on a l'égalité $A = f^{-1}(f(A))$, alors f est injective.

c) Soit $B \subseteq Y$. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ mais que l'égalité peut faire défaut. Montrer qu'on a égalité si f est surjective.

d) Montrer que si pour tout sous-ensemble B de Y on a l'égalité $f(f^{-1}(B)) = B$, alors f est surjective.

⋆ **Exercice 4.** Soient X et Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$ une application. Soient $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de X et $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de Y. On suppose I et J non vides. Soit A une partie de X et B une partie de Y. Démontrer les assertions suivantes.

a) $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$ et $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, avec égalité quand f est injective.

b) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ et $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j)$.

c) ${}^c(f^{-1}(B)) = f^{-1}({}^cB)$. Quelles inclusions y a-t-il entre ${}^c(f(A))$ et $f({}^cA)$?

Exercice 5. Soient X et Y deux ensembles. Soit $f : X \to Y$ une application.

a) Soit $\Phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ l'application qui à une partie A de X associe la partie $f(A)$ de Y.
   - i) Montrer que f est injective si et seulement si Φ l'est.
   - ii) Montrer que f est surjective si et seulement si Φ l'est.

b) Soit $\Psi : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ l'application qui à une partie B de Y associe la partie $f^{-1}(B)$ de X.
   - i) Montrer que f est injective si et seulement si Ψ est surjective.
   - ii) Montrer que f est surjective si et seulement si Ψ est injective.

Fonctions indicatrices

⋆ **Exercice 6.** Soient A, B, C des parties d'un ensemble X. Pour chacune des fonctions suivantes, définies sur X et à valeurs réelles, dire si elle est la fonction indicatrice d'une partie de X et si oui, de laquelle.

a) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$, b) $\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$, c) $\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$, d) $|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$, e) $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B$,
f) $||\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B| - \mathbb{1}_C|$, g) $|\mathbb{1}_A - |\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_C||$, h) $\sup(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$, i) $\inf(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Exercice 7. Soit X un ensemble. Construire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X et l'ensemble $\{0,1\}^X$ des fonctions de X dans $\{0,1\}$.

Exercice 8. Soit X un ensemble. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de X. Montrer que

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{\substack{I\subseteq\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{card}(I)=k}} \mathbb{1}_{\bigcap_{i\in I} A_i}.$$

On commencera par écrire cette formule pour $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Quelques bijections à retenir

Exercice 9. Soient A, B, C, D quatre ensembles. On suppose données une bijection $f : A \to B$ et une bijection $g : C \to D$.

a) Construire une bijection entre $\mathcal{P}(A)$ et $\mathcal{P}(B)$.

b) On suppose que $A \cap C = B \cap D = \varnothing$. Construire une bijection entre $A \cup C$ et $B \cup D$.

c) Construire une bijection entre $A \times C$ et $B \times D$.

d) Construire une bijection entre A^C et B^D.

Exercice 10. Soient A, B, C trois ensembles. Construire une bijection entre $A^{B\times C}$ et $(A^B)^C$.

Exercice 11. Soient X et Y deux ensembles. Des ensembles $\mathcal{P}(X \times Y)$ et $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)$, y en a-t-il un qui soit naturellement inclus dans l'autre ?