# Intégration numérique

**Exercice 1** Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1])$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)$$

où $\xi \in ]0,1]$ et $w_0$, $w_1$, $w_2$ sont des réels. On pose

$$E(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \left[w_0 f(0) + w_1 f'(0) + w_2 f'(\xi)\right].$$

1. Déterminer les paramètres $\xi$, $w_0$, $w_1$, $w_2$ pour que la formule de quadrature soit exacte si $f$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. Les paramètres $\xi$, $w_0$, $w_1$, $w_2$ étant ainsi fixés, calculer $E\left(x \mapsto x^4\right)$ et en déduire l'ordre de la méthode. Déterminer le noyau de Péano $K$ associé à la méthode.
3. En déduire une expression de l'erreur $E(f)$ lorsque $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$.
4. A l'aide d'un changement de variable, construire une méthode de quadrature élémentaire sur un intervalle $[a,b]$ et donner la valeur de l'erreur.

**Exercice 2 (Interpolation – Intégration numérique utilisant les polynômes de Hermite)**

1. Soit $(\alpha_i)_{1\le i\le 4} \in \mathbb{R}^4$. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathcal{P}_3$ vérifiant les égalités :
$$p(0) = \alpha_1,\ p'(0) = \alpha_2,\ p(1) = \alpha_3,\ p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$
2. Calculer les quatres polynômes $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ de $\mathcal{P}_3$ vérifiant les relations (1) avec respectivement $(\alpha_i)_{1\le i\le 4}$ égal à $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ et $(0,0,0,1)$. Montrer que le polynôme $p$ de la question 1 s'écrit comme une combinaison linéaire des $(p_i)_{1\le i\le 4}$ :
$$p = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i.$$
3. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit $p_f$ le polynôme de la question 1 avec $\alpha_1 = f(0)$, $\alpha_2 = f'(0)$, $\alpha_3 = f(1)$ et $\alpha_4 = f'(1)$. Montrer que pour chaque point $x \in ]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in ]0,1[$ tel que
$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4} f^{(4)}(\xi_x),$$
avec $\pi(x) = x^2(x-1)^2$.

4. On approche l'intégrale d'une fonction $f$ à l'aide de la formule de quadrature
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_0^1 p_f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer les poids
$$w_i = \int_0^1 p_i(x)\,\mathrm{d}x$$
pour $1 \leq i \leq 4$ et en déduire une formule explicite de la formule de quadrature.
5. Montrer que la fonction $x \mapsto f^{(4)}(\xi_x)$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. En déduire qu'il existe un point $\eta \in ]0,1[$ tel que l'erreur $E(f) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 p_f(x)\,\mathrm{d}x$ s'écrive :
$$E(f) = \frac{1}{720} f^{(4)}(\eta).$$
6. Calculer le noyau de Péano de la méthode élémentaire. Retrouver le résultat démontré à la question 5.
7. Soit maintenant $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$. En utilisant les résultats précédents, construire une formule de quadrature de la forme :
$$J(f) = \gamma_1 f(a) + \gamma_2 f'(a) + \gamma_3 f(b) + \gamma_4 f'(b)$$
qui soit exacte pour les polynômes de $\mathcal{P}_3$. Calculer l'erreur
$$E(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - J(f).$$
8. Soit une discrétisation de l'intervalle $[a,b]$ avec des points équidistants $x_i = a+ih$ pour $0 \leq i \leq n$, avec $h = (b-a)/n$. Construire une formule de quadrature composée qui utilise les valeurs $(f(x_i))_{0\leq i\leq n}$ et $(f'(x_i))_{0\leq i\leq n}$. Estimer l'erreur de cette formule de quadrature.

**Exercice 3 (Calcul des coefficients de la formule de Newton-Cotes)**
On rappelle la formule de quadrature élémentaire de Newton-Cotes de rang $l \in \mathbb{N}^*$ :
$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \sim 2\sum_{j=0}^{l} w_j^{(l)} f(x_j), \tag{2}$$
où les points $x_j$sont équidistants d'abscisse $x_j = -1 + 2j/l,\ j = 0,\ldots,l$. On note $E_l(f)$ l'erreur d'approximation $\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - 2\sum_{j=0}^{l} w_j^{(l)} f(x_j)$.

1. Montrer que
$$w_j^{(l)} = \frac{(-1)^{l-j}\binom{l}{j}}{l\,l!}\int_0^l \frac{\pi_l(s)}{s-j}\mathrm{d}s,$$
pour $j = 0,\ldots,l$ avec $\pi_l(s) = \prod_{j=0}^{l}(s-j)$.
2. Si le polynôme $\pi_l(s)$ est écrit sous la forme
$$\pi_l(s) = \sum_{j=0}^{l+1} S_i^{(l+1)} s^i,$$

montrer que les coefficients $S_i^{(l+1)}$ ( appelés les nombres de Stirling de première espèce) vérifient :

$$\begin{cases} S_0^{(1)} = 0 \\ S_1^{(1)} = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} S_0^{(l+1)} = 0 \\ S_i^{(l+1)} = S_{i-1}^{(l)} - lS_i^{(l)} \ \forall i = 0, \ldots, l \\ S_{l+1}^{(l+1)} = 1. \end{cases}$$

3. Si

$$\frac{\pi_l(s)}{s-j} = \sum_{j=0}^{l} a_{j,i}^{(l)} s^i,$$

en déduire un alogorithme de calcul des coefficients $S_j^{(l+1)}$ et $a_{j,i}^{(l)}$. Trouvez les expressions des points $w_j^{(l)}$ par cet algorithme.

4. Construire les formules de Newton-Cotes pour $l = 1, 2, 3$.
5. Calculer le noyau de Péano associé aux formules de Newton-Cotes pour $l = 1, 2$. Evaluer les erreurs d'interpolations.

**Exercice 4 (Intégration numérique aux points de Tchebychev)**
Nous nous proposons d'établir quelques résultats sur la formule approchée :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \sim \int_{-1}^{1} P_n(x)\,\mathrm{d}x$$

où $P_n$ est le polynôme d'interpolation de degré $n$ de $f$ aux points de Tchebychev

$$x_i = \cos\theta_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i = 0, \ldots, n.$$

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note

$$a_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \arccos x) - \cos(n \arccos y)}{x-y}\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$$

avec $w_i = \dfrac{(-1)^i \sin\theta_i}{n+1} a_{n+1}(x_i)$.

2. Calculer $a_{n+1}(x) + a_{n-1}(x)$ ; en déduire la valeur de

$$a_{n+1}(x) - 2x a_n(x) + a_{n-1}(x).$$

3. En distinguant deux cas suivant la parité de $n$, montrer l'égalité

$$\sin\theta\, a_n(\cos\theta) = 2\sin(n\theta) - 4 \sum_{1 \le q \le \frac{n+1}{2}} \frac{1}{4q^2-1} \sin((n-2q)\theta).$$

4. En déduire l'expression de $w_i$ :

$$w_i = \frac{1}{n+1}\left[2 - 4 \sum_{1 \le q \le \frac{n+1}{2}} \frac{1}{4q^2-1} \cos(2q\theta_i)\right].$$

Montrer que $w_i > 0$ pour $i = 0, \ldots, n$.