Interpolation numérique

Exercice 1 (Polynômes de Lagrange et de Hermite)
Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction $\mathcal{C}^3$ sur [0,1]. On note

$$a = f(0), b = f(1) \text{ et } M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points $0, \epsilon$ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle [0,1],

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant :

$$P(0) = a, \qquad P'(0) = f'(0), \qquad P(1) = b.$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points 0,1 et aux entiers 1,0*, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approche f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M. *(Indication : considérer la fonction ϕ définie par $\phi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\phi^{(3)}(\xi) = 0$).*

Exercice 2 (Etude de l'erreur d'interpolation – choix des points d'interpolation)
Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de cet intervalle. Afin d'estimer l'erreur d'interpolation

$$\begin{aligned} E_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_n), \text{ avec } \pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n), \end{aligned}$$

nous nous proposons de calculer une majoration de $|\pi_{n+1}(x)|$, $x \in [a,b]$ pour différents choix de la répartition des points d'interpolation.

a) (**Points équidistants**) Lorsque les points d'interpolation sont équidistants, on a $x_k = x_0 + kh$ pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$, où $h = (b-a)/n$. De plus,

$$\begin{aligned} |\pi_{n+1}(x_0 + sh)| &= h^{n+1}|s(s-1)\dots(s-n)| \\ &= h^{n+1}\phi(s). \end{aligned}$$

i) Monter que $\phi(s)$ atteint son maximum en un point $s_n \in]0,1/2[$ et que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

ii) Monter que $\phi(s_n) \leq \frac{n!}{\ln n}$.

iii) En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ tel que

$$|\pi_{n+1}(x)| \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$

b) (**Points de Tchebichev**)

i) Montrer que pour tout $u \in [-1,1]$, $t_n(u) = \cos(n \arccos u)$ est un polynôme de degré n. Trouver la formule de récurrence qui permet de calculer $t_n(u)$.

ii) Trouver les racines $u_i \in [-1,1]$, $i = 0, 1, \ldots, n$ du polynôme t_{n+1}(points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n).

iii) Montrer que les polynômes de base de Lagrange l_i associés aux points u_i sont donnés par

$$l_i(u) = (-1)^i \frac{t_{n+1}(u)}{(u-u_i)} \frac{\sqrt{1-u_i^2}}{(n+1)}.$$

Calculer l'erreur d'interpolation.

iv) Les points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n de l'intervalle [a,b], notés x_i, sont définis comme les images des points u_i par une bijection affine $u \to x$ qui envoie -1 en a et $+1$ en b. Montrer que

$$\|\pi_{n+1}\| = \sup_{x\in[a,b]} |\pi_{n+1}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Comparer avec l'expression obtenue pour les points d'interpolation équidistants.

Exercice 3 (Polynômes de Tchebichev)

a) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux zéros du polynôme de Tchebichev t_5 est pair.

b) Soit la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de t_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.

c) A l'aide de la méthode des différences divisées, calculer $q(u)$ et en déduire $P(x)$(on donnera le tableau des différences divisées et le résultat $P(x)$ sera ordonné x).

Exercice 4 (Polynômes orthogonaux – Tchebichev et Legendre)

Soit $]a,b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a,b[\to]0,+\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale

$$\int_a^b |x|^n w(x)dx$$

est convergente pour tout entier n. L'espace vectoriel E des fonctions f continues sur $]a,b[$, telles que

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x)dx} < +\infty$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

a) Montrer que E contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes. Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n) orthogonaux pour un poids donné w et tels que $\deg(p_n) = n$.

b) Montrer que les polynômes de Tchebichev

$$t_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[-1, 1]$.

c) Même question pour les polynômes de Legendre

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1, 1]$.

d) Soit (p_n) une suite de polynômes unitaires orthogonaux pour le poids w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x),$$

pour tout $n \geq 2$ avec

$$\lambda_n = \frac{\langle xp_{n-1} \mid p_{n-1}\rangle}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

Retrouver, en particulier, les relations de récurrence pour le calcul des polynômes

1) de Tchebichev

$$t_{n+1}(x) = 2xt_n(x) - t_{n-1}(x)$$

et de Legendre :

$$nL_n(x) = (2n - 1)xL_{n-1}(x) - (n - 1)L_{n-2}.$$

Exercice 5 (Polynômes de Bernstein)
On cherche à approcher une fonction continue f par un polynôme sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $0 \leq j \leq n$, on définit les polynômes de Bernstein par :

$$B_j(x) = C_j^n x^j (1 - x)^{n-j}.$$

a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $B_j(x) \geq 0$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j=0}^{n} (j - nx)^2 B_j(x) = nx(1 - x).$$

b) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1])$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) B_j(x).$$

Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j(x).$$

c) Montrer que f est uniformément continue sur $[0, 1]$, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$, on a

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $x \in [0, 1]$ fixé, montrer qu'on a

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|}{2n\delta^2}$$

et que la suite (P_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

d) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Que peut-on dire de l'erreur

$$\|f - P_n\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P_n(x)|$$

quand $n \to +\infty$?

Exercice 6 (Phénomène de Runge)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

On considère l'intervalle $I = [-5, 5]$, et on note $\Delta x = 10/n$ (pour $n \neq 0$) le pas de discrétisation et

$$x_j^n := \begin{cases} -5 + j\Delta x & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ les abscisses des points d'interpolation.

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

$$f[x_0^n, \ldots, x_n^n, x] = f(x).\left[\frac{(-1)^{r+1}}{\prod_{j=0}^{j=r}(1 + (x_j^n)^2)}\right].\begin{cases} 1 \text{ si } n = 2r+1, \\ x \text{ si } n = 2r. \end{cases}$$

Indication : on pourra utiliser la fonction g définie par $g(x) = f[x_1, \ldots, x_{m-1}, x]$ et montrer que $f[x_0, \ldots, x_m, x] = g[x_0, x_m, x]$.

2. On pose

$$g_n(x) = \prod_{j=0}^{j=r} \frac{x^2 - (x_j^n)^2}{1 + (x_j^n)^2}.$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \Delta x \ln |g_n(x)| = \int_{-5}^{0} \ln \left|\frac{x^2 - \xi^2}{1+\xi^2}\right| d\xi = \Phi(x)$$

lorsque les hypothèses $(\mathcal{H})$ suivantes sont vérifiées :

$$-5 \leq x \leq 5 \quad \text{ et } \quad \min_{0\leq j\leq r} |x^2 - (x_j^n)^2| \geq \theta\frac{\Delta x}{2}, \theta \in]0, 1[. \qquad (\mathcal{H})$$

3. En calculant $\Phi(x)$, montrer que

$$\Phi(\tilde{x}) = 0 \text{ pour } \tilde{x} = 3.63\ldots$$
$$\Phi(x) < 0 \text{ pour } |x| < \tilde{x}$$
$$\Phi(x) > 0 \text{ pour } \tilde{x} < |x| < 5$$

4. Montrer que si $(\mathcal{H})$ est vérifiée et $|x| > \tilde{x}$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} |g_n(x)| = +\infty.$$

Que peut-on en déduire pour l'erreur d'interpolation ?

Exercice 7 (Splines Cubiques)

1. Déterminer l'unique fonction $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :
   (a) σ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$;
   (b) $\sigma(t) = 0$ pour $t \leq 0$;
   (c) σ est un polynôme de degré au plus égal à 3 pour $t \geq 0$;

(d) $\lim_{t \to 0^+} \sigma'''(t) = 1$.

2. Soient $[a, b]$ un intervalle borné sur $\mathbb{R}$, $n \geq 2$ un entier et t_i des réels tels que $a < t_1 < \cdots < t_n < b$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui ont les propriétés suivantes :

   (a) s est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$

   (b) la restriction de s à chacun des intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ est un polynôme de degré au plus égal à 3 ;

   (c) la restriction de s à chacun des intervalles $[a, t_1]$ et $[t_n, b]$ est un polynôme de degré au plus égal à 1.

   Montrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ? On montrera que toute fonction $s \in \mathcal{S}$ peut s'écrire sous la forme :

$$s(t) = \alpha + \beta t + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \sigma(t - t_i).$$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe une unique fonction $s \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$s(t_i) = f(t_i) \quad \text{pour tout } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

   Indication : on écrira le système linéaire que vérifient les coefficients α, β et γ_i pour $i = 1, \ldots, n$.