Chapitre 6

Fonctions spéciales à variation bornée

6.1 Definition et caractérisation

Définition 6.1.1. L'espace $SBV(\Omega)$ des *fonctions spéciales à variation bornée* dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est défini comme étant l'ensemble des fonctions $u \in BV(\Omega)$ telles que $D^c u = 0$.

Autrement dit, si $u \in SBV(\Omega)$, la partie singulière du gradient de u est purement de type saut et

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^N + (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u.$$

Il s'agit d'un sous-espace strict de $BV(\Omega)$.

Exemple 6.1.2. (i) $W^{1,1}(\Omega) \subset SBV(\Omega)$ car si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ et donc, en particulier $D^c u = 0$.

(ii) Si $E \subset \Omega$ est un ensemble mesurable tel que $\mathcal{L}^N(E) + P(E, \Omega) < \infty$, alors $\chi_E \in SBV(\Omega)$ car $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial_* E$. Par conséquent, comme $\partial_* E = S_{\chi_E}$, on en déduit que $D\chi_E = D\chi_E \llcorner S_{\chi_E} =: D^j \chi_E$ et donc $D^c \chi_E = 0$.

(iii) *Crack tip.* En dimension $N = 2$, la fonction définie en coordonnées polaire par

$$u(r, \theta) := \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad 0 \leq r < 1,\ \theta \in (-\pi, \pi)$$

appartient à $SBV(B_1)$ avec $S_u = (-1, 0) \times \{0\}$.

(iv) En dimension $N = 1$, la fonction de Cantor-Vitali u (qui est une fonction dans $BV(0,1)$ puisque croissante) n'appartient pas à $SBV(0,1)$ car on a déjà vu que $Du = D^c u \neq 0$.

Nous allons commencer par donner une caractérisation de cet espace. Pour ce faire, pour toute fonction Lipschtzienne $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ on introduit la notation

$$\|\psi\|_* := \sup\{|\psi(t) - \psi(s)| : s,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

De plus, on vérifie aisément que pour tout s, $t \in \mathbb{R}$ avec $s \neq t$,

$$\sup_{\psi \in X} \frac{|\psi(s) - \psi(t)|}{\|\psi\|_*} = 1,$$

où $X := \{\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) :\ \psi' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}),\ \psi \text{ non constante}\}$.

Proposition 6.1.3 (Caractérisation de SBV). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $u \in BV(\Omega)$. Supposons qu'il existe une fonction $a \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et une mesure positive finie μ sur Ω telle que pour toute fonction Lipschitzienne $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$*

$$|D\psi(u) - \psi'(u)a\mathcal{L}^N| \le \|\psi\|_*\mu. \tag{6.1.1}$$

Alors $u \in SBV(\Omega)$, $a = \nabla u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω et $\mu \ge \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Réciproquement si $u \in SBV(\Omega)$ et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u) < \infty$, alors (6.1.1) est satisfait avec $a = \nabla u$ et $\mu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Démonstration. On montre d'abord la condition nécessaire. Si $u \in SBV(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction Lipschitz, le théorème 5.2.6 montre que $\psi(u) \in SBV(\Omega)$ avec

$$D\psi(u) = \psi'(u)\nabla u\mathcal{L}^N + (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$$

et donc

$$|D\psi(u) - \psi'(u)\nabla u\mathcal{L}^N| \le \|\psi\|_*\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u,$$

ce qui montre bien (6.1.1) avec $a = \nabla u$ et $\mu = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Pour la condition suffisante, on considère $x_0 \in \Omega$ un point de Lebesgue de a et u, qui est aussi un point de différentiabilité approché de u et tel que la limite

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^N}$$

existe et est finie. D'après le théorème de différentiation de Besicovitch et le théorème de Calderon-Zygmund, $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x_0 \in \Omega$ satisfont ces propriétés.

On pose $u_0(y) = \nabla u(x_0) \cdot y$ et on considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$ telle que $\psi(t) = t$ si $t \in u_0(B_1)$ et une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_1)$. Pour tout $\varrho > 0$ tel que $B_\varrho(x_0) \subset \Omega$, on pose alors

$$\psi_\varrho(t) := \psi\left(\frac{t - u(x_0)}{\varrho}\right), \quad \varphi_\varrho(x) = \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right).$$

On note tout d'abord que

$$\frac{\|\psi_\varrho\|_*\mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} = \varrho\frac{\|\psi\|_*\mu(B_\varrho(x_0))}{\varrho^N} \to 0.$$

En changeant de variable, on obtient d'une part

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_\varrho(u)\nabla\varphi_\varrho\,dx &= \frac{1}{\varrho}\int_\Omega \psi\left(\frac{u(x) - u(x_0)}{\varrho}\right)\nabla\varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right)dx \\ &= \varrho^{N-1}\int_{B_1} \psi(u_\varrho(y))\nabla\varphi(y)\,dy, \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

où $u_\varrho(y) = [u(x_0 + \varrho y) - u(x_0)]/\varrho$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \psi_\varrho(u)\nabla\varphi_\varrho\,dx &= -\int_\Omega \varphi_\varrho\,dD\psi_\varrho(u) \\ &= -\int_\Omega \varphi_\varrho\,d[D\psi_\varrho(u) - a\psi'_\varrho(u)\mathcal{L}^N] - \int_\Omega \varphi_\varrho a\psi'_\varrho(u)\,dx \\ &= o(\varrho^{N-1}) - \varrho^{N-1}\int_{B_1} \varphi(y)a(x_0 + \varrho y)\psi'(u_\varrho(y))\,dy \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

car

$$\left| \int_\Omega \varphi_\varrho \, d[D\psi_\varrho(u) - a\psi_\varrho'(u)\mathcal{L}^N] \right| \leq \|\varphi\|_\infty \|\psi_\varrho\|_* \mu(B_\varrho(x_0)) = o(\varrho^{N-1}).$$

En regroupant (6.1.2) et (6.1.3), il vient

$$\int_{B_1} \psi(u_\varrho(y)) \nabla\varphi(y) \, dy = o(1) - \int_{B_1} \varphi(y) a(x_0 + \varrho y) \psi'(u_\varrho(y)) \, dy.$$

D'après le choix du point x_0, on obtient par passage à la limite quand $\varrho \to 0$ que

$$\int_{B_1} \psi(u_0(y)) \nabla\varphi(y) \, dy = -\int_{B_1} \varphi(y) a(x_0) \psi'(u_0(y)) \, dy,$$

puis, suite à une intégration par partie dans le membre de gauche de la précédente inégalité $\nabla[\psi(u_0(y))] = a(x_0)\psi'(u_0(y))$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $y \in B_1$. Comme ψ est l'identité sur $u_0(B_1)$, il vient que $\nabla u(x_0) = a(x_0)$.

D'après le théorème 5.2.6, $D^a\psi(u) = \psi'(u)\nabla u \mathcal{L}^N$ et donc pour toute fonction Lipschitz $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, on a

$$|D^s\psi(u)| \leq \|\psi\|_* \mu. \tag{6.1.4}$$

En particulier, une nouvelle utilisation du théorème 5.2.6 montre que

$$|\psi'(\tilde{u}) D^c u| = |D^c\psi(u)| = |D^s\psi(u)| \llcorner (\Omega \setminus S_u) \leq \|\psi\|_* \mu \llcorner (\Omega \setminus S_u).$$

En choisissant $\psi_\varepsilon^1(t) = \sin(t/\varepsilon)$ et $\psi_\varepsilon^2(t) = \cos(t/\varepsilon)$, on obtient en utilisant que $|\cos t| + |\sin t| \geq 1$

$$|D^c u| \leq 4\varepsilon \mu \llcorner (\Omega \setminus S_u),$$

puis que $|D^c u| = 0$ en faisant tendre $\varepsilon \to 0$. On a donc bien montré que $u \in SBV(\Omega)$.

D'après (6.1.4) et le théorème 5.2.6,

$$|\psi(u^+) - \psi(u^-)| \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u = |D^s\psi(u)| \llcorner S_u \leq \|\psi\|_* \mu \llcorner S_u.$$

Soit $X := \{\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) : \psi' \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \psi \text{ non constante}\}$ qui est un sous-espace séparable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ car la dérivé d'une fonction $\psi \in X$ appartient à $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ qui est lui même séparable. On considère alors un sous-ensemble D dénombrable dense dans X. D'après le théorème de différentiation de Besicovitch et le fait que S_u est rectifiable (voir théorème 3.4.3), pour tout $\psi \in D$, il existe un ensemble $Z_\psi \subset S_u$ Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable tel que

$$|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))| \leq \|\psi\|_* \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} \quad \text{pour tout } x_0 \in S_u \setminus Z_\psi.$$

En posant $Z = \bigcup_{\psi \in D} Z_\psi$ qui reste un Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable, l'inégalité précédente reste vraie pour tout $x_0 \in S_u \setminus Z$ et pour tout $\psi \in D$. Comme

$$1 = \sup_{\psi \in X} \frac{|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))|}{\|\psi\|_*} = \sup_{\psi \in D} \frac{|\psi(u^+(x_0)) - \psi(u^-(x_0))|}{\|\psi\|_*},$$

on en déduit que

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} \geq 1 \quad \text{pour tout } x_0 \in S_u \setminus Z.$$

La Proposition 3.2.7 montre alors que $\mu \geq \mu \llcorner (S_u \setminus Z) \geq \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (S_u \setminus Z) = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$, ce qui conclut la preuve du résultat. □

Nous allons nous intéresser à des propriétés de fermeture de cet espace. Notons que si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $SBV(\Omega)$ telles que $\sup_k \|u_k\|_{BV(\Omega)} < \infty$, alors, quitte à extraire une sous-suite $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ avec $u \in BV(\Omega)$, mais en général, $u \notin SBV(\Omega)$. Par exemple, en dimension $N = 1$, la fonction de Cantor-Vitali est la limite (uniforme) dans $(0,1)$ d'une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions Lipschitziennes croissantes sur $(0,1)$. En particulier $u_k \in SBV(\Omega)$ et $\|u_k\|_{BV(\Omega)} \leq u_k(1) - u_k(0) = 1$, mais $u \notin SBV(0,1)$ car $Du = D^c u \neq 0$.

Nous allons montrer un résultat de compacité “faible” dans l'espace SBV.

Théorème 6.1.4 (Ambrosio). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $SBV(\Omega)$ telle que*
$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\|u_k\|_\infty + \|\nabla u_k\|_2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k})\right\} < \infty.$$
Alors, il existe une sous-suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telles que
$$\begin{cases} u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \textit{faible* dans } L^\infty(\Omega),\\ \nabla u_{k_j} \rightharpoonup \nabla u \quad \textit{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^N),\\ \mathcal{H}^{N-1}(S_u) \leq \liminf_j \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_{k_j}}). \end{cases}$$

Démonstration. D'après les définitions des limites approximatives, on a clairement que $|u_k^\pm| \leq \|u_k\|_\infty$ de sorte que
$$|Du_k|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_k|\,dx + \int_{S_{u_k}} |u_k^+ - u_k^-|\,d\mathcal{H}^{N-1} \leq \sqrt{\mathcal{L}^N(\Omega)}\|\nabla u_k\|_2 + 2\|u_k\|_\infty \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}) \leq C.$$
D'après les hypothèses (on rappelle que Ω est borné), la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, la suite $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et la suite de mesures $\{\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite, toujours notée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour simplifier, telle que
$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega),\\ \nabla u_k \rightharpoonup a \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^N),\\ \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k} \rightharpoonup \mu \quad \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega), \end{cases}$$
où $u \in BV(\Omega)$, $a \in L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ est une mesure positive. De plus, par injection compacte de Rellich on a également que $u_k \to u$ fortement dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. En utilisant de nouveau la borne $L^\infty(\Omega)$ sur $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ on en déduit que $u_k \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Soit $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction Lipschitzienne. En particulier, $D\psi(u_k) \rightharpoonup D\psi(u)$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Comme $\psi'(u_k) \to \psi'(u)$ fortement dans $L^2(\Omega)$ et ψ' est une fonction bornée, on en déduit que $\psi'(u_k)\nabla u_k \rightharpoonup \psi'(u)a$ faiblement dans $L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, comme en vertu du théorème 5.2.6, on a
$$D\psi(u_k) = \psi'(u_k)\nabla u_k \mathcal{L}^N + (\psi(u_k^+) - \psi(u_k^-))\nu_{u_k}\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k},$$
il vient
$$|D\psi(u_k) - \psi'(u_k)\nabla u_k \mathcal{L}^N| \leq \|\psi\|_* \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_{u_k},$$
puis par semicontinuité inférieure de la variation totale
$$|D\psi(u) - \psi'(u)a\mathcal{L}^N| \leq \|\psi\|_* \mu.$$

Par application du théorème 6.1.3, on en déduit que $a = \nabla u$, $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u \leq \mu$ et, en particulier,
$$\mathcal{H}^{N-1}(S_u) \leq \mu(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}),$$
ce qui conclut la preuve du théorème de compacité. $\square$

6.2 Le problème de Mumford-Shah

On considère une image donnée par un niveau de gris $g : \Omega \to [0,1]$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné, que l'on cherche à segmenter, i.e., trouver une bonne approximation des contours. Un problème variationnel proposé par Mumford-Shah consiste à déterminer un ensemble $K \subset \Omega$ (correspondant aux contours) de longueur minimale et une fonction $u : \Omega \setminus K \to \mathbb{R}$ "proche" de g et "régulière" en dehors de K. On considère alors le problème de minimisation suivant :

$$\inf\left\{\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2\, dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_\Omega |u-g|^2\, dx\right\},$$

où l'infimum est pris parmi tous les ensembles fermés $K \subset \Omega$ et toutes les fonctions $u \in H^1(\Omega \setminus K)$. Une formulation faible, proposée par Ambrosio et De Giorgi, consiste à assimiler K à l'ensemble des sauts de u. Le problème peut alors se reformuler dans le cadre des fonctions à variation bornée

$$\alpha := \inf_{u\in BV(\Omega)}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \mathcal{H}^1(S_u) + \int_\Omega |u-g|^2\, dx\right\}.$$

Il s'avère que l'espace $BV(\Omega)$ est trop grand car on peut montrer, par exemple en dimension 1, que toute fonction $g \in L^\infty(\Omega)$ peut être approchée dans $L^2(\Omega)$ par une suite de fonctions $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telles que $\nabla u_k = 0$ et $\mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, de sorte que $\alpha = 0$.

C'est précisément pour cette raison que l'espace $SBV(\Omega)$ a été introduit par Ambrosio et De Giorgi. On définit alors la fonctionnelle de Mumford-Shah

$$F(u) := \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \int_\Omega |u-g|^2\, dx, \quad u \in SBV(\Omega)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $g \in L^\infty(\Omega)$. Nous allons montrer qu'il existe une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telle que

$$F(u) \le F(v) \quad \text{pour tout } v \in SBV(\Omega).$$

Notons

$$I := \inf\{F(v) : \; v \in SBV(\Omega)\},$$

de sorte que $0 \le I \le F(0) \le \int_\Omega |g|^2\, dx$. On considère une suite minimisante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $SBV(\Omega)$ telle que $F(u_k) \to I$. On note $M := \|g\|_\infty$ et on pose $\psi(t) = \min(\max(t, -M), M)$ qui est une fonction 1-Lipschitz, croissante et borné. On régularise ensuite ψ en posant $\psi_\varepsilon := \psi * \eta_\varepsilon$ qui est une fonction croissante, bornée, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et 1-Lipschtzienne. Comme $\psi_\varepsilon \to \psi$ ponctuellement sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $\psi_\varepsilon(u_k) \to \psi(u_k)$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω, puis que $\psi_\varepsilon(u_k) \to \psi(u_k)$ dans $L^1(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée. De plus, $|D\psi_\varepsilon(u_k)|(\Omega) \le |Du_k|(\Omega)$, ce qui montre que la suite $\{D\psi_\varepsilon(u_k)\}_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et donc que $D\psi_\varepsilon(u_k) \rightharpoonup D\psi(u_k)$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Il vient alors que $v_k := \psi(u_k) \in BV(\Omega)$ puis, par semicontinuité inférieure de la variation totale, on a aussi que $|Dv_k| \le |Du_k|$. La fonction ψ étant 1-Lipschitz, on a que $S_{v_k} \subset S_{u_k}$. Par conséquent,

$$|D^c v_k| = |D^s v_k| \llcorner (\Omega \setminus S_{v_k}) \le |D^s u_k| \llcorner (\Omega \setminus S_{v_k}) = |D^j u_k| \llcorner (S_{u_k} \setminus S_{v_k}).$$

Comme d'après le théorème 5.2.3, l'ensemble $S_{u_k} \setminus S_{v_k}$ est σ-fini par rapport à la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$, le théorème 5.2.5 montre que $|D^c v_k| = 0$ et donc que $v_k \in SBV(\Omega)$. Par construction $\|v_k\|_\infty \le M$. De plus, par la propriété de localité du gradient approché, on a

$$\begin{cases} \nabla v_k = \nabla u_k & \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{u_k = v_k\}, \\ \nabla v_k = 0 & \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{v_k = -M\} \cup \{v_k = M\}, \end{cases}$$

de sorte que $|\nabla v_k| \leq |\nabla u_k|$. Par conséquent, en utilisant également le fait que ψ est 1-Lipschitz, on en déduit que

$$I \leq F(v_k) \leq F(u_k) \to I,$$

et donc $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une nouvelle suite minimisante. Comme $I < \infty$, on en déduit que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \|v_k\|_\infty + \|\nabla v_k\|_2 + \mathcal{H}^{N-1}(S_{v_k}) \right\} < \infty$$

et le théorème de compacité d'Ambrosio montre l'existence d'une sous-suite $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ et une fonction $u \in SBV(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} v_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{faible* dans } L^\infty(\Omega), \\ \nabla v_{k_j} \rightharpoonup \nabla u \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega;\mathbb{R}^N), \\ \mathcal{H}^{N-1}(S_u) \leq \liminf_j \mathcal{H}^{N-1}(S_{v_{k_j}}). \end{cases}$$

Par conséquent

$$I \leq F(u) \leq \liminf_{j\to\infty} F(v_{k_j}) = I,$$

ce qui montre effectivement que $F(u) = I$ et donc que u est une solution du problème de minimisation de Mumford-Shah.