Chapitre 2

Fonctions à variation bornée

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. L'espace $BV(\Omega)$ des *fonctions à variation bornée* dans Ω est l'ensemble des fonctions $f \in L^1(\Omega)$ telles qu'il existe une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot d\mu \quad \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N).$$

En d'autres termes, la dérivée distributionnelle Du de u peut être représentée par une mesure de Radon bornée. On identifiera systématiquement Du et μ et on écrira que $Du \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. La variation totale de u est alors donnée par

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), \ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

De manière générale, on peut définir la variation totale de toute fonction $u \in L^1(\Omega)$ par

$$TV(u, \Omega) := \sup \left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N), \ |\varphi| \leq 1 \right\},$$

cette quantité pouvant éventuellement être infinie. Une application immédiate du théorème de représentation de Riesz montre alors qu'une fonction $u \in L^1(\Omega)$ appartient à $BV(\Omega)$ si et seulement si $TV(u, \Omega) < \infty$.

On vérifie aisément le résultat suivant.

Proposition 2.1.2. *L'espace $BV(\Omega)$ a une structure d'espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme*

$$\|u\|_{BV(\Omega)} := \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega).$$

Exemple 2.1.3. (i) L'espace de Sobolev $W^{1,1}(\Omega)$ est contenu dans $BV(\Omega)$. De plus, si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, alors $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$ et

$$|Du|(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u| \, dx,$$

où $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ est la dérivée faible de u. En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a par définition de $W^{1,1}(\Omega)$ que

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot \nabla u \, dx$$

de sorte que $Du = \nabla u \mathcal{L}^N$. Une application directe de la Proposition 1.1.9 montre alors que $|Du| = |\nabla u| \mathcal{L}^N$.

(ii) L'inclusion de $W^{1,1}(\Omega)$ dans $BV(\Omega)$ est stricte. En effet, si $N = 1$ et $\Omega = (-1,1)$, on considère la fonction caractéristique $u = \chi_{(0,1)} \in L^1(-1,1) \setminus W^{1,1}(-1,1)$. Or, le calcul de sa dérivée distributionnelle montre que

$$Du = \delta_0 \in \mathcal{M}(-1,1)$$

et donc que $u \in BV(-1,1)$.

L'exemple précédent est un cas particulier d'ensemble de périmètre fini que nous étudierons en détail au chapitre 4. Un troisième exemple de fonction à variation bornée concerne les fonctions ayant des singularités concentrées sur un ensemble diffus de type Cantor. Pour voir cela, nous allons étudier le cas de fonctions d'une seule variable.

Exemple 2.1.4. Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et intégrable. Alors, $u \in BV(a,b)$ et $|Du|((a,b)) \le u(b) - u(a)$.

En effet, quitte à étendre u par $u(a)$ sur $(-\infty, a)$ et $u(b)$ sur $(b, +\infty)$, on peut supposer que u est croissante (et localement intégrable) sur $\mathbb{R}$. Soit η_ε un noyau régularisant, on pose $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon$ de sorte que u_ε est $\mathcal{C}^\infty$ et croissante sur $\mathbb{R}$. D'une part, on a

$$\int_a^b u'_\varepsilon \, dx = u_\varepsilon(b) - u_\varepsilon(a) = \int_{\mathbb{R}} [u(b-s) - u(a-s)] \eta_\varepsilon(s) \, ds \le u(b) - u(a).$$

D'autre part, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(a,b)$ avec $|\varphi| \le 1$ et tout $\varepsilon > 0$ assez petit

$$\int_a^b u_\varepsilon \varphi' \, dx = \int_a^b u'_\varepsilon \varphi \, dx \le \int_a^b u'_\varepsilon \, dx,$$

ce qui montre que

$$\int_a^b u_\varepsilon \varphi' \, dx \le u(b) - u(a).$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient que

$$\int_a^b u \varphi' \, dx \le u(b) - u(a),$$

puis, par passage au supremum parmi toutes les fonctions test, il vient $|Du|((a,b)) \le u(b) - u(a)$.

Un exemple important est celui de la fonction de Cantor-Vitali (encore connue sous le nom de l'escalier du diable) représente un dernier exemple de fonction BV. Il s'agit d'une fonction continue croissante dont la dérivé ponctuelle s'annule $\mathcal{L}^1$-presque partout (en fait en dehors de l'ensemble triadique de Cantor). Dans cet exemple, la dérivée distributionnelle est une mesure diffuse concentrée sur l'ensemble triadique de Cantor qui s'avère être un ensemble de dimension de Hausdorff $\ln 2 / \ln 3 \in (0,1)$.

La variation totale jouit d'une propriété de semicontinuité inférieure.

Proposition 2.1.5. *Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $L^1(\Omega)$ et $u \in L^1(\Omega)$ telles que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$. Alors*

$$TV(u, \Omega) \le \liminf_{k\to\infty} TV(u_k, \Omega).$$

Démonstration. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telle que $|\varphi| \le 1$, on a

$$\int_\Omega u \, \mathrm{div}\varphi \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega u_k \, \mathrm{div}\varphi \, dx \le \liminf_{k\to\infty} TV(u_k, \Omega).$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions tests, on obtient le résultat escompté. □

2.2 Approximation par des fonctions régulières

La topologie forte de BV est une topologie trop restrictive pour espérer avoir la densité des fonctions lisses dans cet espace. En effet si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions régulières qui approche dans $BV(\Omega)$ une fonction $u \in BV(\Omega)\setminus W^{1,1}(\Omega)$, alors $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $BV(\Omega)$ et donc également dans $W^{1,1}(\Omega)$. Par complétude de $W^{1,1}(\Omega)$ on aurait alors que $u_k \to v$ dans $W^{1,1}(\Omega)$ puis, par unicité de la limite (au sens des distributions) $u = v \in W^{1,1}(\Omega)$ ce qui est absurde.

Il convient alors d'affaiblir le mode d'approximation. C'est l'objet du résultat suivant qui sera central dans la suite de ce cours.

Théorème 2.2.1 (**Anzellotti-Giaquinta).** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit $u \in BV(\Omega)$. Alors il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega)\cap BV(\Omega)$ telle que*

1. *$u_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$;*
2. *$Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$;*
3. *$|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$.*

Démonstration. On commence par le cas où $\Omega = \mathbb{R}^N$. On considère un noyau régularisant η_{ε_k} et on pose $u_k := u * \eta_{\varepsilon_k} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On sait par les propriétés classiques de la convolution que $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u_k \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$ et, par semicontinuité inférieure de la variation totale,

$$|Du|(\mathbb{R}^N) \le \liminf_{k\to\infty} TV(u_k,\mathbb{R}^N).$$

Par ailleurs, comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u_k\,\mathrm{div}\varphi\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N}(u*\eta_{\varepsilon_k})\,\mathrm{div}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u[(\mathrm{div}\varphi)*\eta_{\varepsilon_k}]\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} u\,\mathrm{div}(\varphi*\eta_{\varepsilon_k})\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N}\varphi*\eta_{\varepsilon_k}\cdot dDu = -\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\cdot(Du*\eta_{\varepsilon_k})\,dx,\end{aligned}$$

alors $\nabla u_k = (Du)*\eta_{\varepsilon_k}$. D'après la Proposition 1.3.6, $Du_k \rightharpoonup Du$ localement faiblement dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ et

$$TV(u_k,\mathbb{R}^N) \le |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Ceci implique que $\{Du_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$, en particulier $u_k \in BV(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ ainsi que

$$\limsup_{k\to\infty} |Du_k|(\mathbb{R}^N) \le |Du|(\mathbb{R}^N),$$

ce qui conclut la preuve du théorème dans le cas de tout l'espace.

Cas d'un ouvert général. Soient $k \ge 1$ et $\{\Omega_i\}_{i\ge1}$ une suite croissante d'ouverts bornés tels que $\overline{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1}$, $\bigcup_i \Omega_i = \Omega$ et $|Du|(\Omega\setminus\Omega_1) \le 1/4k$, on pose

$$A_1 := \Omega_2, \quad A_i := \Omega_{i+1}\setminus\overline{\Omega}_{i-1} \text{ pour tout } i \ge 2.$$

On a alors que A_i est ouvert pour tout $i \ge 1$ et $\Omega = \bigcup_i A_i$. Comme ce recouvrement de A_i est localement fini, on peut considérer une partition de l'unité $\theta_i \in \mathcal{C}^\infty_c(A_i)$ telle que $0 \le \theta_i \le 1$ et $\sum_{i=1}^\infty \theta_i = 1$ sur Ω.

Pour tout $i \ge 1$, on choisit $\varepsilon_i > 0$ assez petit de sorte que $\mathrm{Supp}((\theta_i u)*\eta_{\varepsilon_i}) \subset A_i$ et

$$\int_\Omega |(\theta_i u)*\eta_{\varepsilon_i} - \theta_i u|\,dx \le \frac{1}{k2^i} \tag{2.2.1}$$

$$\int_\Omega |(u\nabla\theta_i)*\eta_{\varepsilon_i} - u\nabla\theta_i|\,dx \le \frac{1}{k2^{i+1}}. \tag{2.2.2}$$

On pose alors

$$u_k := \sum_{i=1}^{\infty} (\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i}$$

ce qui définit une fonction $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ du fait que la somme est localement finie. D'une part, comme $u = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i u$, on a d'après (2.2.1)

$$\int_\Omega |u_k - u|\, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |(\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i} - \theta_i u|\, dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k2^i} = \frac{1}{k} \to 0,$$

ce qui montre que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et, en particulier, par semicontinuité inférieure de la variation totale, que

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} TV(u_k, \Omega).$$

On montre maintenant l'autre inégalité. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telle que $|\varphi| \leq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_k \operatorname{div}\varphi\, dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega (\theta_i u) * \eta_{\varepsilon_i} \operatorname{div}\varphi\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \theta_i u[(\operatorname{div}\varphi) * \eta_{\varepsilon_i}]\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega \theta_i u \operatorname{div}(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})\, dx \\
&= \sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}))\, dx - \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega u \nabla\theta_i \cdot (\varphi * \eta_{\varepsilon_i})\, dx \\
&\quad + \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1}))\, dx. \qquad (2.2.3)
\end{aligned}$$

Comme $\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfait $|\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1})| \leq 1$, alors

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_1(\varphi * \eta_{\varepsilon_1}))\, dx \leq |Du|(\Omega). \qquad (2.2.4)$$

D'autre par, pour $i \geq 2$, on a $\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}) \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$, $|\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})| \leq 1$ et $\operatorname{Supp}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i})) \subset A_i$. Par conséquent,

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}))\, dx \leq |Du|(A_i) \leq |Du|(\Omega_{i+1}) - |Du|(\Omega_{i-1}),$$

puis, en sommant pour $i \geq 2$,

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_\Omega u \operatorname{div}(\theta_i(\varphi * \eta_{\varepsilon_i}))\, dx \leq 2|Du|(\Omega \setminus \Omega_1) \leq \frac{1}{2k}. \qquad (2.2.5)$$

Enfin, en utilisant le fait que $\sum_{i\geq 1} \nabla\theta_i = 1$, il vient

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega u \nabla\theta_i \cdot (\varphi * \eta_{\varepsilon_i})\, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega [(u\nabla\theta_i) * \eta_{\varepsilon_i} \cdot \varphi - u\nabla\theta_i \cdot \varphi]\, dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega |(u\nabla\theta_i) * \eta_{\varepsilon_i}) - u\nabla\theta_i|\, dx \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k2^{i+1}} = \frac{1}{2k}, \qquad (2.2.6)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé (2.2.2) dans la dernière inégalité. En regroupant (2.2.3)–(2.2.6), on obtient que

$$\int_\Omega u_k \,\mathrm{div}\varphi \, dx \leq |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}.$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions test φ, on en déduit que

$$TV(u_k, \Omega) \leq |Du|(\Omega) + \frac{1}{k} < \infty,$$

ce qui montre, à la fois que $u_k \in BV(\Omega)$ avec $|Du_k|(\Omega) = TV(u_k, \Omega) \leq |Du|(\Omega) + \frac{1}{k}$. En particulier, la suite $\{Du_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et donc $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Enfin, on a bien que $\limsup_k |Du_k|(\Omega) \leq |Du|(\Omega)$, ce qui conclut la preuve du théorème. $\square$

Notons que la suite approximante n'est pas régulière jusque sur le bord. Si toutefois le bord est régulier, le résultat peut être améliorer tout comme dans les espaces de Sobolev.

Théorème 2.2.2. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de de frontière Lipschitz et soit $u \in BV(\Omega)$. Alors il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que*

1. *$u_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$;*
2. *$Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$;*
3. *$|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème d'Anzellotti-Giaquinta, il existe une suite une suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $v_k \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$, $Dv_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ et $|Dv_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. L'ouvert Ω étant Lipschitzien, l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $W^{1,1}(\Omega)$. Pour tout $k \geq 1$, il existe donc une fonction $u_k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u_k - v_k\|_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \frac{1}{k}.$$

En particulier, $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et comme $||Du_k|(\Omega) - |Dv_k|(\Omega)| \leq \frac{1}{k} \to 0$, on en déduit que $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Enfin, comme la suite $\{\nabla u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a $Du_k = \nabla u_k \mathcal{L}^N \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. $\square$

2.3 Théorèmes d'injection

Tout comme dans les espaces de Sobolev, les fonctions à variation bornée possèdent de meilleures propriétés d'intégrabilité.

Théorème 2.3.1 (Injection de Sobolev dans $\mathbb{R}^N$). *Il existe une constante $\gamma_N > 0$, qui ne dépend que de la dimension, telle que pour tout $u \in BV(\mathbb{R}^N)$,*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \gamma_N |Du|(\mathbb{R}^N).$$

Démonstration. Soit $u_\varepsilon := u * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N) \cap BV(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème d'injection de Sobolev pour l'espace $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, il existe une constante $\gamma_N > 0$ telle que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \gamma_N \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Comme $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une sous-suite telle que $u_\varepsilon \to u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, comme $\nabla u_\varepsilon = (Du) * \eta_\varepsilon$, la Proposition 1.3.6 montre que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon| \, dx \leq |Du|(\mathbb{R}^N)$. Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ et en utilisant le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\mathbb{R}^N)} \leq \gamma_N \liminf_{\varepsilon\to 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \gamma_N |Du|(\mathbb{R}^N),$$

ce qui termine la preuve du résultat. $\square$

Sur un domaine borné, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3.2 (**Injection de Sobolev dans un domaine borné).** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Lipschitz. Il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de la dimension N et de Ω, telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\|u\|_{BV(\Omega)}.$$

Démonstration. Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut également supposer que $u_k \to u$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans Ω. D'après le théorème d'injection de Sobolev pour l'espace $W^{1,1}(\Omega)$, il existe une constante $C > 0$, qui ne dépend que de N et Ω, telle que

$$\|u_k\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\|u_k\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

Par passage à la limite quand $k \to \infty$ et en utilisant le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\|u\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{W^{1,1}(\Omega)} = C\|u\|_{BV(\Omega)},$$

ce qui termine la preuve du résultat. □

Nous avons également un analogue du théorème de compacité.

Théorème 2.3.3 (**Rellich).** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière Lipschitz. Pour tout $1 \leq p < N/(N-1)$, l'injection $BV(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ est compacte. En particulier, de toute suite bornée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{k_j} \to u$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $u \in BV(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $BV(\Omega)$. D'après le théorème d'approximation d'Anzellotti-Giaquinta, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $v_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que

$$\|u_k - v_k\|_{L^1(\Omega)} + ||Du_k|(\Omega) - |Dv_k|(\Omega)| \leq \frac{1}{k}.$$

En particulier, la suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,1}(\Omega)$ et le théorème de Rellich (pour $W^{1,1}(\Omega)$) montre l'existence d'une sous-suite $\{v_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $L^1(\Omega)$ vers une fonction $u \in L^1(\Omega)$. Il vient alors que $u_{k_j} \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et comme $\{Du_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$, alors $Du_{k_j} \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ avec $u \in BV(\Omega)$. Comme, d'après le théorème 2.3.2, la suite $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ est également bornée dans $L^{N/(N-1)}(\Omega)$, on en déduit que $u_{k_j} \to u$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < N/(N-1)$. □

L'étude de problèmes variationnels repose très souvent sur des inégalités de type Poincaré permettant de contrôler les valeurs d'une fonction lorsqu'on contrôle son gradient. En voici maintenant une version dans BV.

Théorème 2.3.4 (**Inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger).** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné connexe de frontière Lipschitz. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ (qui ne dépend que de la dimension et Ω) telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C_\Omega|Du|(\Omega),$$

où $u_\Omega := \mathcal{L}^N(\Omega)^{-1} \int_\Omega u(x)\, dx$ désigne la moyenne de u sur Ω.

Démonstration. Montrons d'abord qu'il existe une constante $C_\Omega > 0$ (qui ne dépend que de la dimension et Ω) telle que pour tout $u \in BV(\Omega)$,

$$\|u - u_\Omega\|_{L^1(\Omega)} \leq C_\Omega |Du|(\Omega),$$

On raisonne par contradiction en supposant qu'il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u_k \, dx = 0, \quad \int_\Omega |u_k| \, dx = 1, \quad |Du_k|(\Omega) \leq \frac{1}{k}.$$

D'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe une fonction $u \in BV(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$. De plus, les propriétés précédentes montrent que

$$\int_\Omega u \, dx = 0, \quad \int_\Omega |u| \, dx = 1, \quad |Du|(\Omega) = 0.$$

On en déduit, Ω étant connexe, que $u \equiv c$ est constante sur Ω et par la propriété de la moyenne, que $c = 0$, ce qui contredit le fait que $\|u\|_{L^1(\Omega)} = 1$.

D'après le théorème 2.3.2 ainsi que le cas précédent, il vient

$$\|u - u_\Omega\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(\Omega)} \leq C\|u - u_\Omega\|_{BV(\Omega)} \leq C(C_\Omega + 1)|Du|(\Omega),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

2.4 Applications

2.4.1 Le modèle de Rudin-Osher-Fatemi

Un problème classique en traitement d'image concerne le débruitage d'une image au moyen de sa régularisation par variation totale. On suppose qu'une image est donnée par une fonction $g \in L^2(\Omega)$ définie sur un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^2$. On cherche à régulariser l'image en pénalisant les trop grandes variations. Pour ce faire on introduit le problème variationnel suivant, dit de *Rudin-Osher-Fatemi* :

$$\alpha := \inf_{u\in BV(\Omega)} \left\{ |Du|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u-g|^2 \, dx \right\},$$

où $\lambda > 0$ est un terme de pénalisation.

Montrons que ce problème est bien posé. Pour ce faire on considère une suite minimisante $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $BV(\Omega)$ telle que

$$|Du_k|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_k - g|^2 \, dx \to \alpha.$$

Notons que $\alpha \in [0, +\infty)$ car en choisissant le compétiteur $u = 0$, on obtient que

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |g|^2 \, dx < \infty.$$

Par conséquent, la suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. On peut donc extraire une sous-suite (toujours notée $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$) telle que $u_k \rightharpoonup u_*$ faiblement dans $L^2(\Omega)$ et $Du_k \rightharpoonup Du_*$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ avec $u_* \in BV(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Par semicontinuité inférieure de la norme $L^2(\Omega)$ (pour la convergence faible de $L^2(\Omega)$) ainsi que la semicontinuité inférieure de la variation totale, on obtient que

$$\alpha \leq |Du_*|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_* - g|^2\, dx \leq \liminf_{k\to\infty} \left\{ |Du_k|(\Omega) + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u_k - g|^2\, dx \right\} = \alpha,$$

ce qui montre que u_* est un minimiseur de la fonctionnelle de Rudin-Osher-Fatemi.

Ce problème peut être également interprété comme un modèle simplifié scalaire de fluide de Bingham plastique, parfois connu sous le nom de *problème de Mosolov* sans viscosité.

2.4.2 Elasto-plasticité parfaite

Un modèle simplifié d'élasto-plasticité parfaite consiste à déterminer un champ de contrainte $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^2$ ainsi qu'un déplacement scalaire $u : \Omega \to \mathbb{R}$, définis sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tels que, en notant $p := \nabla u - \sigma$ le vecteur des déformations permanentes (ou plastiques), (u, σ, p) minimise la fonctionnelle d'énergie

$$J(v, \tau, q) := \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau|^2\, dx + \int_\Omega |q|\, dx - \int_\Omega f v\, dx$$

parmi tous les triplets $(v, \tau, q) \in W^{1,1}(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ qui satisfont la condition $\nabla v = \tau + q$ dans Ω. Le premier terme représente l'énergie cinétique en régime stationnaire, le deuxième est l'énergie élastique, le troisième est l'énergie de dissipation plastique et enfin le quatrième n'est autre que le travail des efforts extérieurs dans lequel on suppose que $f \in L^2(\Omega)$.

On pose

$$\alpha := \inf \left\{ J(v, \tau, q) : \ (v, \tau, q) \in W^{1,1}(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \times L^1(\Omega; \mathbb{R}^2),\ \nabla v = \tau + q \text{ dans } \Omega \right\}$$

et on considère une suite minimisante $\{(u_k, \sigma_k, p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$J(u_k, \sigma_k, p_k) \to \alpha.$$

Remarquons que $-\frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \alpha \leq J(0,0,0)$ de sorte que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ et $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que

$$\begin{cases} u_k \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \\ \sigma_k \rightharpoonup \sigma & \text{faiblement dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^2), \\ p_k \rightharpoonup p & \text{faible* dans } \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2), \end{cases}$$

où $(u, \sigma, p) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2)$. De plus en utilisant que $\nabla u_k = \sigma_k + p_k$, on en déduit que $\nabla u_k \mathcal{L}^2 \rightharpoonup \sigma\mathcal{L}^2 + p$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2)$, ce qui montre que $u \in BV(\Omega)$ avec $Du = \sigma\mathcal{L}^2 + p$. De plus, par semicontinuité inférieure de la variation totale

$$\liminf_{k\to\infty} J(u_k, \sigma_k, p_k) \geq \tilde{J}(u, \sigma, p),$$

où l'on a posé

$$\tilde{J}(v, \tau, q) := \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\tau|^2\, dx + |q|(\Omega) - \int_\Omega f v\, dx$$

pour tout $(v, \tau, q) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega; \mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ tels que $Dv = \tau\mathcal{L}^2 + q$ dans Ω. Montrons que (u, σ, p) minimise la fonctionnelle $\tilde{J}$.

Soit $(v,\tau,q) \in BV(\Omega) \times L^2(\Omega;\mathbb{R}^2) \times \mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ tel que $Dv = \tau\mathcal{L}^2 + q$ dans Ω. En adaptant la preuve du théorème d'Anzellotti-Giaquinta (exercice), on montre l'existence d'une suite $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que $v_k \to v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, $Dv_k \rightharpoonup Dv$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega;\mathbb{R}^2)$ et $|Dv_k - \tau\mathcal{L}^2|(\Omega) \to |Dv - \tau\mathcal{L}^2|(\Omega)$. On pose alors $q_k := Dv_k - \tau \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^2)$ de sorte que

$$J(v_k,\tau_k,q_k) \to \tilde{J}(v,\tau,q).$$

Par conséquent,

$$\tilde{J}(u,\sigma,p) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_k,\sigma_k,p_k) = \alpha \leq \limsup_{k\to\infty} J(v_k,\tau_k,q_k) \leq \tilde{J}(v,\tau,q),$$

ce qui montre effectivement que (u,σ,p) minimise l'énergie, dite relaxée, $\tilde{J}$.