TD6: convergences faible* et faible

Exercice 1. Soient E un espace de Banach et F un sous-espace dense dans E. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' et $f \in E'$. Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ faible* dans E' si et seulement si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' et $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ pour tout $x \in F$.

Exercice 2. (Concentration-compacité).

1. **Oscillation.** Soit $u \in L^\infty(0,1)$ telle que $\int_0^1 u\,dx = 0$. On étend u à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité, et on définit la suite

   $$u_n(x) := u(nx) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que $u_n \rightharpoonup 0$ faible* dans $L^p(0,1)$ (faible dans $L^1(0,1)$) et que la convergence n'est pas forte.
2. **Concentration.** On suppose que $1 \le p < \infty$. Soit $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int_{\mathbb{R}} v\,dx = 1$, et on définit la suite

   $$v_n(x) := n^{1/p} v(nx) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que $v_n \rightharpoonup 0$ faible* dans $L^p(\mathbb{R})$ pour

   $$1 < p < \infty$$

   et que la convergence n'est pas forte. Montrer que, pour $p = 1$, v_n ne converge pas faiblement vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ mais que $v_n \rightharpoonup \delta_0$ faible* dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.
3. **Evanescence.** Soit v comme en 2. et on définit la suite

   $$w_n(x) := v(n + x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que $w_n \rightharpoonup 0$ faible* dans $L^p(\mathbb{R})$ et que la convergence n'est pas forte. Montrer que w_n ne converge pas faiblement vers 0 dans $L^1(\mathbb{R})$ mais que $w_n \rightharpoonup 0$ faible* dans $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Exercice 3. (Théorème de Vitali-Hahn-Saks). *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $L^1(X)$ telle que la limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n\,d\mu$$

existe pour tout $A \in \mathcal{A}$. Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

1. Montrer que $E := \{\mathbf{1}_A : A \in \mathcal{A}\}$ est un espace métrique complet.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ les ensembles

   $$E_k := \left\{ \mathbf{1}_A \in E : \sup_{n,l\ge k} \left| \int_X (f_n - f_l)\mathbf{1}_A\,d\mu \right| \le \frac{\varepsilon}{8} \right\}$$

   sont fermés dans E et que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$.

3. En utilisant le Théorème de Baire, montrer qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$, $\delta' > 0$ et $\mathbf{1}_{A_0} \in E_{k_0}$ tels que si $\mathbf{1}_A \in E$ satisfait
$$\int_X |\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_0}|\, d\mu < \delta',$$
alors $\mathbf{1}_A \in E_{k_0}$.
4. Montrer qu'il existe $0 < \delta \leq \delta'$ tel que si $A \in \mathcal{A}$ satisfait $\mu(A) < \delta$, alors
$$\sup_{0 \leq n \leq k_0} \int_A |f_n|\, d\mu < \frac{\varepsilon}{4}.$$
5. Montrer que si $A \in \mathcal{A}$ satisfait $\mu(A) < \delta$, alors $\mathbf{1}_{A \cup A_0}$ et $\mathbf{1}_{A_0 \setminus A} \in E_{k_0}$.
6. En déduire que pour tout $n \geq k_0$,
$$\left| \int_A f_n\, d\mu \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
7. Conclure.

Exercice 4. (Théorème de Dunford-Pettis). *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^1(\Omega)$ telle que*
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^1(\Omega)} < +\infty.$$
(i) Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(\Omega)$ avec $f \in L^1(\Omega)$, alors la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable.
(ii) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est équi-intégrable, alors il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telles que $f_{\sigma(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(\Omega)$.

1. En utilisant le Théorème de Vitali-Hahn-Saks, établir (i)
2. Le reste de l'exercice est consacré à la démonstration de (ii).
   (a) Montrer que l'on peut se restreindre au cas $f_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Soit $g_n^k := f_n \mathbf{1}_{\{f_n \leq k\}}$ pour tout n, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
   $$\sup_{n \geq 1} \|g_n^k - f_n\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty.$$
   (c) Montrer l'existence d'une sous-suite $(g^k_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et d'une fonction $g^k \in L^1(\Omega)$ telles que $g^k_{\sigma(n)} \rightharpoonup g^k$ faiblement dans $L^1(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que $g^k \to f$ fortement dans $L^1(\Omega)$ avec $f \in L^1(\Omega)$.
   (e) Conclure.

Exercice 5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On considère une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$ et $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Montrer que $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si
$$\begin{cases} f_n(x) \to f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée dans } \mathcal{C}_0(\Omega). \end{cases}$$