Université Paris Saclay — Master 1

Année 2020-2021 — Analyse, Mathématiques Générales II

TD1: Compacité

Exercice 1. (Théorème de Bolzano-Weierstrass)

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$.
   (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $y_k := \sup_{n\geq k} x_n$. Montrer que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $\ell \in \mathbb{R}$.
   (b) Construire une application $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que
   $$|x_{\sigma(n)} - \ell| \leq \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$
   (c) Conclure
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}^d$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.
3. En déduire que les parties compactes de $\mathbb{R}^d$ sont les fermés bornés.

Exercice 2. (Equivalence des normes en dimension finie) Soit E un espace vectoriel de dimension finie d et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $x_1, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ les composantes de x dans la base $\mathcal{B}$ de sorte que

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i.$$

1. On définit la quantité
   $$\|x\|_* := \max_{1\leq i\leq d} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in E.$$
   Montrer qu'il s'agit d'une norme.
2. Soit N une norme sur E. Montrer que l'application
   $$\begin{array}{rcl} N : (E, \|\cdot\|_*) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & N(x) \end{array}$$
   est Lipschitzienne.
3. Montrer que l'ensemble $S := \{x \in E : \|x\|_* = 1\}$ est compact.
4. Montrer qu'il existe $m > 0$ et $M > 0$ tels que
   $$m\|y\|_* \leq N(y) \leq M\|y\|_* \quad \text{pour tout } y \in E.$$
5. En déduire que toutes les normes sont équivalentes sur E.

6. Soit
$$\Phi : (E, \|\cdot\|_*) \to (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$$
l'application définie par
$$\Phi(x) = (x_1, \ldots, x_d) \quad \text{pour tout } x \in E.$$
Montrer que Φ est un isomorphisme isométrique.
7. En déduire que les compactes de E sont les parties fermées et bornées