Université Paris Saclay

Master Mathématiques et Applications

Parcours M1 Mathématiques Fondamentales

Parcours M1 Formation à l'Enseignement Supérieur

Analyse II

Jean-François Babadjian

Table des matières

Chapitre 1

Quelques rappels sur la compacité

La compacité est une notion fondamentale en analyse. A titre d'exemple elle est à la base de résultats d'existence en théorie des équations aux dérivées partielles, où l'on cherche souvent à approcher les (éventuelles) solutions d'une équation par celles d'un problème approché. Celui-ci peut être obtenu, par exemple, par discrétisation de type différences finies, éléments finis ou volumes finis (c'est l'objet de l'analyse numérique de rendre rigoureux ce type d'approches) ou par des méthodes de régularisation. On cherche ensuite à faire converger les solutions approchées vers des solutions du problème de départ en établissant des propriétés de compacité.

L'objet de ce premier chapitre est de rappeler des résultats connus sur la compacité dans les espaces métriques et les espaces vectoriels normés. On s'attachera à pointer du doigt les limites d'application de la notion classique de compacité notamment dans les espaces de dimension infinie.

1.1 Topologie dans les espaces métriques

On rappelle qu'un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une *distance* d qui est une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

i) *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout x, $y \in X$;
ii) *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;
iii) *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout x, y, $z \in X$.

On notera $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et rayon r et $\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée.

Définition 1.1.1. Un ensemble $U \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Définition 1.1.2. Un ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si son complémentaire ${}^cF = X \setminus F$ est ouvert.

Dans un espace métrique, certaines propriétés topologiques peuvent être caractérisées séquentiellement, i.e., en terme de suite. Il convient donc de rappeler la définition d'une suite convergente.

Définition 1.1.3. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Le résultat suivant permet de caractériser séquentiellement le fait qu'un ensemble est fermé.

Proposition 1.1.4. *Un sous ensemble F de X est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. $\Longleftarrow$: Il s'agit de montrer que F est fermé, autrement dit que $U := X \setminus F$ est ouvert. Si $U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $x \in U$ et supposons que pour tout $r > 0$, on a $B(x, r) \not\subset U$. En prenant $r = 1/n$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $d(x, x_n) < 1/n$ et $x_n \in X \setminus U = F$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $x_n \to x$ et notre hypothèse montre que $x \in F$ ce qui est absurde. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert et donc que F est fermé.

$\Longrightarrow$: Supposons F fermé de sorte que son complémentaire $U := X \setminus F$ est ouvert. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$. Si $x \in U$, celui-ci étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par définition de la limite, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < r$ pour tout $n \geq N$. En particulier $x_N \in B(x, r) \subset U$, ce qui est absurde puisque $x_N \in F$. Par conséquent, $x \in F$. $\square$

Dans ce qui suit, (X_1, d_1) et (X_2, d_2) désignent deux espaces métriques.

Définition 1.1.5. Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X_1$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$d_1(x, y) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur une partie A de X_1 si elle est continue en tout point de A.

Dans un espace métrique, la continuité en un point est équivalente à la continuité séquentielle.

Lemme 1.1.6. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans X_1, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans X_2.*

Démonstration. Si f est continue en x et $x_n \to x$ dans X_1, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(x, x_n) \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $d_2(f(x), f(x_n)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, si f n'est pas continue en x, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d_1(x, y_\delta) \leq \delta$ et $d_2(f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans X_1 et $d_2(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$, ce qui montre que $f(x_n) \not\to f(x)$. $\square$

De même, dans les espaces métriques, on retrouve la caractérisation des fonctions continues pour les espaces topologiques.

Proposition 1.1.7. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de X_2 est un ouvert de X_1 (resp. l'image réciproque de tout fermé de X_2 est un fermé de X_1).*

Démonstration. On démontre seulement la première assertion, la seconde suit par passage au complémentaire.

Soit f continue et U_2 un ouvert de X_2, on pose $U_1 := f^{-1}(U_2)$. Si $U_1 = \emptyset$, il n'y a rien à montrer. Sinon on considère un élément $x \in U_1$. Alors $f(x) \in U_2$ qui est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$. Par continuité de f en x, il existe un $\delta > 0$ tel que $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$, soit $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2) = U_1$ ce qui prouve que U_1 est ouvert dans X_1.

Réciproquement, soient $x \in X_1$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $U_2 = B_2(f(x), \varepsilon)$ est ouvert dans X_2, donc $f^{-1}(U_2)$ est ouvert dans X_1 et $x \in f^{-1}(U_2)$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2)$, soit $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon))$ ce qui montre que f est continue en x. □

1.2 Compacité dans un espace métrique

Nous introduisons ci-dessous deux notions, l'une topologique, l'autre séquentiellement, de compacité.

Définition 1.2.1 (Propriété de Borel-Lebesgue). Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$, i.e.

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

on peut extraire un sous recouvrement fini : il existe $i_1, \ldots, i_m \in I$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}.$$

Définition 1.2.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique (X, d) est dit *séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Il s'avère que ces deux notions coïncident dans les espaces métriques.

Théorème 1.2.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.*

Démonstration. **Etape 1 : compact $\Longrightarrow$ séquentiellement compact.** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors on peut clairement extraire une sous-suite convergente. Dans le cas contraire, supposons, par l'absurde qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence. Alors pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors un recouvrement ouvert

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, r_x)$$

du compact X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r_{x_k}).$$

Comme chaque boule ne contient qu'un nombre fini d'élements de la suite, alors X également ce qui est absurde.

Etape 2 : séquentiellement compact $\Longrightarrow$ compact. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Montrons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i(x)}$. Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction strictement croissante, qui converge vers un $x \in X$. Par conséquent, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Or pour n assez grand on a que $B(x_{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}) \subset B(x, r) \subset U_i$ ce qui est impossible.

Montrons à présent que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ρ. Dans le cas contraire, pour tout $x_0 \in X$, la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas X. Il existe donc un $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \rho$. Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $x_i \notin B(x_j, \rho)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$. Comme $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$ ne recouvre pas X, on peut trouver un $x_{n+1} \in X \backslash \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui satisfait $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \neq m$, et qui ne possède donc aucune sous-suite convergente ce qui est absurde.

On a donc montré l'existence de $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_i, \rho)$$

et donc *a fortiori* un sous-recouvrement fini issu de $\{U_i\}_{i\in I}$ puisque, pour $k = 1, \dots, m$ on a $B(x_k, \rho) \subset U_{i(x_k)}$. □

Corollaire 1.2.4. *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers x. Comme X est séquentiellement compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un $\bar{x} \in X$. Par unicité de la limite, on en déduit que $x = \bar{x} \in X$ ce qui montre que X est fermé.

Si X n'est pas borné, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $d(x_n, x_0) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il n'existe pas de sous-suite convergente. □

Noter que la réciproque est fausse en général comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 1.2.5. On se place dans l'espace métrique $(\mathcal{C}([-1,1]), d)$ où

$$d(f,g) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$$

est la distance uniforme entre f et $g \in \mathcal{C}([-1,1])$. Soit

$$f_n : x \in [-1,1] \mapsto f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\ge1}$ dans $\mathcal{C}([-1,1])$ qui est bornée puisque $d(f_n, 0) \le 1$ pour tout $n \ge 1$. Si une sous suite $(f_{\sigma(n)})_{n\ge1}$ de $(f_n)_{n\ge1}$ converge dans $\mathcal{C}([-1,1])$ vers une fonction f, alors on a nécessairement que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ avec

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la boule unité fermée de $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas (séquentiellement) compacte.

Nous verrons toutefois à la section suivante que les parties fermées bornées décrivent tous les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

La proprété suivante exprime le fait que les ensembles compacts sont stables par image continue.

Proposition 1.2.6. *Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ une fonction continue. Si $K \subset X_1$ est compact dans X_1 alors $f(K)$ est compact dans X_2.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K tels que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in K$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$. Par continuité de f, il vient $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \to f(x) \in f(K)$ ce qui montre effectivement que $f(K)$ est compact. □

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut exprimer la Proposition 1.2.6 de la façon suivante.

Proposition 1.2.7. *Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f atteind ses bornes.*

Démonstration. Montrons que f atteint son supremum sur X. Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $f(x_n) \to$

$\sup_X f$. L'espace métrique X étant compact, il existe une sous-suite notée $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$ dans X et, par continuité de f, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Par conséquent

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup_X f.$$

On procède de même pour l'infimum. □

Une autre notion topologique importante est la notion de séparabilité que nous introduisons maintenant.

Définition 1.2.8. Un espace métrique (X, d) est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Les espaces métriques compacts représentent un exemple important d'espace séparable.

Proposition 1.2.9. *Si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est séparable.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, 1/k).$$

Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe donc des points $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{n_j}^k, 1/k).$$

L'ensemble

$$D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{x_j^k\}$$

est dénombrable et dense dans X. □

1.3 Compacité dans un espace vectoriel normé

On rappelle qu'un *espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel E muni d'une *norme* qui est une application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

i) *Séparation* : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$;
iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout x, $y \in E$.

Un exemple typique est l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la norme "produit"

$$\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq d} |x_i| \quad \text{pour tout } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser toutes les parties compactes de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.3.1 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. **Etape 1 : Le cas $d = 1$.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$y_k := \sup_{n\geq k} x_n \in [-M, M]$$

de sorte que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant décroissante et minorée par $-M$, converge vers une limite notée ℓ.

Soit $k(1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|y_{k(1)} - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Par définition du sup, il existe un entier $\sigma(1) \geq k(1)$ tel que

$$x_{\sigma(1)} \leq y_{k(1)} \leq x_{\sigma(1)} + \frac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$|x_{\sigma(1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(1)} - y_{k(1)}| + |y_{k(1)} - \ell| \leq 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe des entiers $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ tels que

$$|x_{\sigma(k)} - \ell| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq p.$$

Comme $y_k \to \ell$, il existe $k(p+1) \geq \sigma(p) + 1$ tel que

$$|y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{2(p+1)}.$$

Par ailleurs, par définition du sup, il existe un entier $\sigma(p+1) \geq k(p+1)$ tel que

$$x_{\sigma(p+1)} \leq y_{k(p+1)} \leq x_{\sigma(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

ce qui montre que

$$|x_{\sigma(p+1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(p+1)} - y_{k(p+1)}| + |y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{p+1}.$$

On a donc montré par récurrence l'existence d'une extraction $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$|x_{\sigma(p)} - \ell| \leq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N},$$

ce qui donne, par passage à la limite, que $x_{\sigma(p)} \to \ell$.

Etape 2 : Le cas $d \geq 2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, il existe un $M > 0$ tel que $\|x_n\|_\infty \leq M$. En particulier, comme $|(x_n)_i| \leq \|x_n\|_\infty$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on en déduit que chacune des suites numériques $((x_n)_i)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. Par conséquent elles admettent chacune une sous-suite convergente. Plus précisément :

— pour $i = 1$, il existe une extraction $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_1 \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1(n)})_1 \to a_1;$$
— pour $i = 2$, la suite $((x_{\sigma_1(n)})_2)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1\circ\sigma_2(n))})_2 \to a_2;$$
— ...

— On suppose qu'il existe des extractions $\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq d-1$ on a
$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i \to a_i.$$
La suite $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{d-1}(n)})_d)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_d \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_d(n)})_d \to a_d.$$

Posons $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. De plus, pour tout $1 \leq i \leq d$, la suite $((x_{\sigma(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cette dernière converge vers a_i dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $(x_{\sigma(n)})_i \to a_i$ dans $\mathbb{R}$ et donc $x_{\sigma(n)} \to a$ dans $\mathbb{R}^d$. $\square$

Corollaire 1.3.2. *Les parties compactes de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2.4, toute partie compacte de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée dans cet espace. Réciproquement si K est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^d$. Comme K est fermé, la Proposition 1.1.4 montre que $x \in K$, et donc K est compact. $\square$

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons un espace vectoriel E de dimension finie égale à $d \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ désigne une base de E, alors tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme
$$x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$
On définit la quantité
$$\|x\|_* := \max_{1\leq i\leq d} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in E, \tag{1.3.1}$$
et on montre aisément qu'il s'agit effectivement d'une norme sur E.

On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} \Phi : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_d). \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que Φ est une application linéaire bijective et que $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_*$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme isométrique de $(E, \|\cdot\|_*)$ sur $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$.

La caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}^d$ obtenue au Corollaire 1.3.2 s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie. Pour ce faire, il convient de remarquer que le choix de la norme n'influe pas sur la topologie et donc sur la description des compacts.

Théorème 1.3.3. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie d et N une norme sur E. Nous allons montrer que les normes N et $\|\cdot\|_*$ sont équivalentes.

Etape 1 : Montrons que l'application

$$\begin{array}{rcl} N : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tout x et $y \in E$, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de N, on a

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) = N\left(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)e_i\right) \\ \leq \sum_{i=1}^d N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| N(e_i) \leq L\|x-y\|_*, \end{aligned}$$

où l'on a noté $L := \sum_{i=1}^d N(e_i)$.

Etape 2 : Montrons que l'ensemble $S := \{x \in E : \|x\|_* = 1\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Le Corollaire 1.3.2 montre que l'ensemble

$$\tilde{S} := \Big\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty = 1\Big\}$$

est un compact de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ car il est fermé (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty$) et borné. Grâce à la continuité de Φ^{-1}, la Proposition 1.2.6 montre que $S = \Phi^{-1}(\tilde{S})$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$.

Etape 3 : Comme N est continue sur E, elle l'est en particulier sur le compact S. La Proposition 1.2.7 montre alors l'existence d'un minimum $a \in S$ et d'un maximum $b \in S$ tels que

$$\|a\|_* = \|b\|_* = 1, \quad N(a) \leq N(x) \leq N(b) \quad \text{ pour tout } x \in S.$$

Notons $m = N(a)$ et $M = N(b)$. Comme $\|a\|_* = 1$, on en déduit que $a \neq 0$ et donc que $N(a) > 0$. Par conséquent, $m > 0$, $M > 0$ et pour tout $y \in E$ ($y \neq 0$), on a $y/\|y\|_* \in S$, ce qui implique

$$m \leq N\left(\frac{y}{\|y\|_*}\right) \leq M.$$

Par la propriété d'homogénéité de la norme N, on en déduit que

$$m\|y\|_* \leq N(y) \leq M\|y\|_* \quad \text{pour tout } y \neq 0. \tag{1.3.2}$$

Cette inégalité reste bien évidemment vraie si $y = 0$, ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_*$ et N sont équivalentes.

Enfin si N_1 et N_2 sont deux normes quelconques sur E, en combinant les inégalités (1.3.2) appliquées à N_1 et N_2, on en déduit que N_1 et N_2 sont effectivement équivalentes. □

En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 1.3.4. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie d et $K \subset E$ un ensemble fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|)$. D'après le Théorème 1.3.3, K est également fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Par continuité de Φ^{-1}, l'ensemble $\Phi(K) = (\Phi^{-1})^{-1}(K)$ est fermé dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Comme Φ est une isométrie $\Phi(K)$ est également borné dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. L'ensemble $\Phi(K)$ est donc un compact de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ en vertu du Corollaire 1.3.2. La continuité de Φ^{-1} et la Proposition 1.2.6 montrent alors que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$ puis également de $(E, \|\cdot\|)$ par une nouvelle application du Théorème 1.3.3. Réciproquement, d'après le Corollaire 1.2.4, toute partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. □

Cette caractérisation est fausse en dimension infinie, comme l'atteste le résultat suivant.

Théorème 1.3.5 (Riesz). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée est compacte si et seulement E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Comme la boule unité fermée $B = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ est fermée et bornée, elle est compacte en vertu du Théorème 1.3.4.

Réciproquement, notons $B := \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E que nous supposons compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon). \tag{1.3.3}$$

Soit $F = \mathrm{Vect}\{x_i\}_{1 \leq i \leq N}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $F = E$, alors le résultat suit. Dans le cas contraire, on peut trouver un $x \in E \setminus F$. Notons $d = \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Comme F est de dimension finie, F est fermé dans E et donc $d > 0$. On peut alors trouver un $y_\varepsilon \in F$ tel que

$$d \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq \frac{d}{1 - \varepsilon}.$$

Posons $z_\varepsilon = \frac{x-y_\varepsilon}{\|x-y_\varepsilon\|} \in B$. Alors pour tout $y \in F$,

$$\|z_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\|y\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq d\frac{1-\varepsilon}{d} = 1 - \varepsilon$$

car $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y \in F$, ce qui montre que

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après (1.3.3), il existe un $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $z_\varepsilon \in B(x_i, \varepsilon)$ et donc, puisque $x_i \in F$,

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \leq \|z_\varepsilon - x_i\| < \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction en choisissant $\varepsilon \leq 1/2$. □

Remarque 1.3.6. Cette propriété est propre aux espaces vectoriels normés. Il existe en particulier des espaces métriques de "dimension infinie" pour lesquels les parties fermées et bornées sont compactes. C'est notamment le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, ainsi que de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (pour lesquels il convient de définir une distance).

La topologie dite "forte" de la norme d'un espace vectoriel normé de dimension infinie contient donc trop d'ouverts pour permettre aux parties fermées et bornées d'être compactes. L'un des objets de ce cours sera d'une part de montrer des critères de compacité dans des espaces fonctionnels particuliers (espace de fonctions continues, espaces de Lebesgue) qui requièrent plus d'hypothèses que seulement d'être bornés, et d'autre part de définir une topologie dite "faible" en retirant des ouverts de la topologie forte, ce qui par là même augmentera le nombre de compacts.

Chapitre 2

Espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques d'espaces de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans $\mathbb{R}$. On notera

$$\mathcal{C}(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$$

et

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continue et bornée}\}.$$

Les espaces $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{C}_b(X)$ sont clairement des espaces vectoriels et la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est finie quelque soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. On montre aisément qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_b(X)$, ce qui fait de $(\mathcal{C}_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ un espace vectoriel normé.

2.1 Complétude de $\mathcal{C}_b(X)$

Proposition 2.1.1. *L'espace $\mathcal{C}_b(X)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_b(X)$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_b(X)$ et montrons qu'elle converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathcal{C}_b(X)$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$ et pour tout $x \in X$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, ce qui assure l'existence d'un nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{R}$. Par passage à la limite quand $m \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x, il vient pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur X. De plus, l'inégalité précédente montre que $\|f\|_\infty \leq \|f_N\|_\infty + \varepsilon < \infty$, ce qui assure que f est bornée. Il reste à montrer que la fonction f est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de f_N qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x,y) \leq \delta$, alors $|f_N(x) - f_N(y)| \leq \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_N\|_\infty + |f_N(x) - f_N(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}_b(X)$. □

Remarque 2.1.2. En vertu de la Proposition 1.2.7, si (X,d) est un espace métrique compact, on a que $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}_b(X)$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(X)$ est un espace de Banach.

2.2 Séparabilité de $\mathcal{C}(X)$

Le Théorème de Weierstrass qui affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales. Le Théorème de Stone-Weierstrass donne une généralisation de ce résultat au cas des fonctions continues $\mathcal{C}(X)$ sur un espace métrique compact (X,d), vu comme une algèbre de Banach muni du produit ponctuel des fonctions. Ce résultat de portée générale donne une caractérisation des sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X)$ qui sont denses dans $\mathcal{C}(X)$. Nous nous concentrons ici juste sur la condition suffisante.

Théorème 2.2.1 (Stone-Weierstrass). *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X)$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points, i.e., pour tout x, $y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X)$.

Nous commençons par montrer le résultat suivant d'approximation polynômiale de la fonction racine carrée.

Lemme 2.2.2. *Il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} P_0(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynômiale. Montrons par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, cette propriété est claire pour $n = 0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors, $P_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\leq P_n(x) + (\sqrt{x} - P_n(x)) \\ &\leq \sqrt{x}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} + P_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en majorée. Elle converge pontuellement vers une limite $\ell(x) \geq 0$ qui satisfait $\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2)$, i.e. $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on remarque que $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$ est continue sur $[0,1]$. D'après la Proposition 1.2.7, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que

$$\max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_n(x)) = \sqrt{x_n} - P_n(x_n).$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une sous suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{x} \in [0,1]$ tels que $x_{\sigma(n)} \to \bar{x}$. En utilisant le fait que la suite de fonctions $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\right) \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_m(x_{\sigma(n)})\right) \\
&= \sqrt{\bar{x}} - P_m(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to+\infty} \max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) = 0.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le fait que la suite de fonction $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient $\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \to 0$. □

On montre à présent que toute sous-algèbre (fermée) de fonctions continues est stable par passage au maximum et minimum.

Corollaire 2.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 2.2.1, si f et $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors* $\max(f,g)$ *et* $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, on en déduit que si $\mathcal{A}$ est une algèbre, il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}$. Si $\|f - g\|_\infty = 0$, alors $\max(f,g) = \min(f,g) = f = g \in \overline{\mathcal{A}}$. On suppose donc désormais que $\|f - g\|_\infty > 0$. On remarque tout d'abord que, du fait que

$$\max(f,g) := \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ et } \min(f,g) := \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

il suffit de montrer que $|f - g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales construite au Lemme 2.2.2. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, il vient

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f - g\|_\infty \in \overline{\mathcal{A}}$$

et d'après le Lemme 2.2.2,

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f - g\|_\infty \to |f - g| \quad \text{uniformément sur } X.$$

Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, on en déduit que $|f-g| \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc que $\max(f,g)$ et $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass.

Démonstration du Théorème 2.2.1. La preuve est divisée en quatre étapes.

Etape 1 : Pour tout x, $y \in X$ et tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, si $\alpha = \beta$, il suffit de considérer la fonction constante égale à $\alpha = \beta$. Par ailleurs, si $\alpha \neq \beta$, alors par hypothèse, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Dans ce cas, la fonction

$$f := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)),$$

appartient à $\mathcal{A}$ et satisfait $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Etape 2 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^x dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, d'après l'étape 1, pour tout $y \in X$, il existe une fonction $f^x_y \in \mathcal{A}$ telle que $f^x_y(x) = h(x)$ et $f^x_y(y) = h(y)$. Comme h et f^x_y sont continues, il existe $r^x_y > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, r^x_y)$,

$$|f^x_y(z) - f^x_y(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(y) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du fait que $f^x_y(y) = h(y)$, on en déduit que $f^x_y(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in B(y, r^x_y)$. Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, r^x_y),$$

par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r^x_{y_i})\}_{1 \leq i \leq l}$. D'après le Corollaire 2.2.3, la fonction

$$f^x := \min_{1 \leq i \leq l} f^x_{y_i}$$

appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ et elle satisfait $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 3 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, soient $x \in X$ et f^x la fonction construite à l'étape 2. Les fonctions f^x et h étant continues, il existe $r'_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, r'_x)$,

$$|f^x(z) - f^x(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(z) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $f^x(x) = h(x)$, on en déduit que $f^x(z) > h(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(x, r'_x)$. On utilise de nouveau la compacité de X pour extraire du recouvrement ouvert $\{B(x, r'_x)\}_{x \in X}$ de X un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'_{x_j})\}_{1 \leq j \leq m}$. On introduit la fonction

$$f := \max_{1 \leq j \leq m} f^{x_j}$$

qui appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en vertu du Corollaire 2.2.3, et qui satisfait $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 4 : D'après l'étape 3, pour tout $h \in \mathcal{C}(X)$ il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_n \to h$ uniformément sur X. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, on en déduit que $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X)$. □

Nous donnons à présent quelques conséquences du théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 2.2.4. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K)$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients réels qui converge uniformément vers f sur K.*

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{R}[X]$ des fonctions polynômiales à coefficients réels contient les fonctions constantes et sépare clairement les points. En effet, si x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x_0 \neq y_0$, alors la fonction affine $f : x \mapsto (x - x_0) \cdot (x_0 - y_0) + (x - y_0) \cdot (x_0 - y_0)$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ et satisfait $f(x_0) = \|x_0 - y_0\|^2 \neq -\|x_0 - y_0\|^2 = f(y_0)$ (car $\|x_0 - y_0\| \neq 0$). La conclusion suit du Théorème de Stone-Weierstrass. □

Corollaire 2.2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathcal{C}(K)$ est séparable.*

Démonstration. D'après le Corollaire 2.2.4, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathbf{P}_n$ (resp. $\mathbf{Q}_n$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels (resp. rationnels) de degré inférieur ou égal à n. L'espace $\mathbf{P}_n$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d = \dim(\mathbf{P}_n)$, on en déduit que $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Q}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^d$, il s'ensuit que $\mathbf{Q}_n$ est dénombrable et dense dans $\mathbf{P}_n$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$ (on utilise ici le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Enfin comme $\mathbb{R}[X] = \bigcup_n \mathbf{P}_n$ et $\mathbb{Q}[X] := \bigcup_n \mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. □

En général l'espace $\mathcal{C}_b(X)$ n'est pas séparable comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 2.2.6. Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}_b(]a, b[)$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_b(]a, b[)$ n'est pas séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $a_n \to a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $b_n \to b$. On pose $x_n = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ et on considère une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}_c(]a, b[)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(x_n) = 1$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset]a_{n+1}, a_n[$. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\varphi_A := \sum_{n\in A} \varphi_n.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \cap \mathrm{Supp}(\varphi_m) = \emptyset$ dès que $n \neq m$, la somme définissant φ_A est toujours localement finie même si A est infini. Par conséquent, φ_A est continue et $0 \leq \varphi_A \leq 1$, ce qui montre que $\varphi_A \in \mathcal{C}_b(]a, b[)$.

Supposons que $\mathcal{C}_b(]a, b[)$ est séparable est considérons une famille $D = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_b(]a, b[)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on considère le plus petit entier $k_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

On définit ainsi une application $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ qui a toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $\Phi(A) := k_A$. Notons que si A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont tels que $A \neq B$, alors (quitte à échanger les rôles de A et B) il existe $n_0 \in A \setminus B$ et donc

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \geq |\varphi_A(x_{n_0}) - \varphi_B(x_{n_0})| = \varphi_A(x_{n_0}) = 1.$$

Par conséquent, si $k_A = k_B$, on aurait par inégalité triangulaire

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \leq \|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty + \|\varphi_B - f_{k_B}\|_\infty < 1,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que si $A \neq B$, alors $k_A \neq k_B$ ce qui établit l'injectivité de l'application Φ, et donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable. [1]

2.3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}(X)$.

Théorème 2.3.1 (Ascoli-Arzela)**.** *Soient (X, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ telle que*

i) (bornitude) pour tout $x \in X$, il existe $M(x) > 0$ telle que $\sup_n |f_n(x)| \leq M(x)$;

ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$,

$$d(x, y) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$ telles que $f_{\sigma(n)}$ converge uniformément vers f sur X.

Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ uniformément convergente, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.

Démonstration. L'espace métrique (X, d) étant compact, la Proposition 1.2.9 assure qu'il est séparable. Il existe donc un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X.

Etape 1 : Définition de la fonction f sur D. L'ensemble D étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j = 0$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f(a_0) \in \mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0) \to f(a_0)$. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0), \dots, f(a_k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_j(n)}(a_j) \to f(a_j) \quad \text{pour tout } 0 \leq j \leq k.$$

1. Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} : n \notin \Psi(n)\}$. Par surjectivité de Ψ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Psi(n_0) = E$. Si $n_0 \in E$, alors par définition de E on aurait $n_0 \notin \Psi(n_0) = E$ ce qui est impossible. Si $n_0 \notin E$, alors toujours par définition de E, on aurait $n_0 \in \Psi(n_0) = E$ ce qui est de nouveau impossible.

La suite $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de nouveau d'extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_0\circ\cdots\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1}) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)} := f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(n)}$$

de sorte que $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_k))_{n\geq k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty} f_{\sigma(n)}(a_k) = f(a_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{2.3.1}$$

Etape 2 : Convergence simple. Montrons que pour tout $x \in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soient ε et δ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de D dans X, il existe un $a \in D$ tel que $d(x,a) \leq \delta$. Par conséquent, pour tout n et $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad \leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a)| + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| + |f_{\sigma(m)}(a) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad \leq 2\varepsilon + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)|.
\end{aligned}$$

Comme $a \in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| \leq \varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc il existe un $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$.

Etape 3 : Uniforme continuité de f. D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de f_n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$ avec $d(x,y) \leq \delta$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f sur X.

Etape 4 : Convergence uniforme. Soient ε et δ donnés par la propriété ii). Par compacité de X, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(a_i, \delta/2)$. Donc si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(a_i, \delta/2)$ et

$$\begin{aligned}
|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\
&\leq 2\varepsilon + \max_{1\leq i\leq N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de f établie à l'étape 3. D'après l'étape 2, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ dès lors que $n \geq n_i$ (qui ne dépend que de ε et de a_i). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \ldots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in X$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers f sur X.

Etape 5 : Réciproque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(X)$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Comme les fonctions f, $f_0, \ldots, f_N$ sont continues sur le compact X, elles sont uniformément continues d'après le Théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \ldots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{cases} d(x,y) \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ d(x,y) \leq \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \ldots, \delta_N)$ de sorte que si x et $y \in X$, alors

$$d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. $\square$

Chapitre 3

Mesures de Radon

L'objet de ce chapitre consiste à identifier le dual topologique de certains espaces de fonctions continues. La connaissance du dual d'un espace fonctionnel est d'une importance capitale en analyse fonctionnelle comme nous le verrons ultérieurement au Chapitre 6. Cela permet notamment d'introduire des topologies affaiblies (par rapport à la topologie forte de la norme) grâce auxquelles on augmente le nombre de compact.

3.1 Compléments sur les espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note

$$\mathcal{C}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \ \mathrm{Supp}(f) \subset K\},$$

où $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}$ désigne le support de f. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, ce qui en fait donc un espace de Banach. On note également

$$\mathcal{C}_c(\Omega) \bigcup_{K \subset \Omega \text{ compact}} \mathcal{C}_K(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.1.1. En dimension $N = 1$, on pose $\Omega =]-1,1[$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,-1+\frac{1}{n}[\cup]1-\frac{1}{n},1[, \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ \frac{2n}{2-n}(x-1+\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}[, \\ \frac{2n}{n-2}(x+1-\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]-1+\frac{1}{n},-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Clairement $f_n \in \mathcal{C}_c(]0,1[)$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[0,1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1[, \\ 2(x+1) & \text{si } x \in]-1,-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Or $\mathrm{Supp}(f) = [0,1]$ ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}_c(]0,1[)$.

On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Nous allons caractériser l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 sur le bord de Ω. Avant cela, il convient de rappeler le résultat suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 3.1.2 (Urysohn). *Soient K un compact et V un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.*

Démonstration. Soit

$$d := \inf_{x\in K, y\in\mathbb{R}^N\setminus V} \|x-y\| = \inf_{x\in K} \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V),$$

où

$$\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) := \inf_{y\in\mathbb{R}^N\setminus V} \|x-y\|.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V)$ étant continue (en fait elle est même 1-Lipschitz) et K étant compact, il existe $\bar{x} \in K$ tel que $d = \mathrm{dist}(\bar{x}, \mathbb{R}^N \setminus V)$. Si $d = 0$, par définition de l'infimum, il existerait une suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus V$ telle que $\|\bar{x} - y_j\| \to 0$. L'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus V$ étant fermé, on aurait alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus V$ ce qui est impossible puisque $\bar{x} \in K \subset V$. Par conséquent, $d > 0$ et l'ensemble

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < d/2\},$$

est un ouvert satisfaisant $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$. La fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U) + \mathrm{dist}(x, K)}$$

convient. □

Proposition 3.1.3. *Une fonction f appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ tels que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Posons $h = fg$ de sorte que $h \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, par définition il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \varepsilon/2$ et définissons $K := \{x \in \Omega : \ |f_{n_\varepsilon}| \geq \varepsilon/2\}$. Alors K est un sous ensemble compact de Ω et pour tout $x \in \Omega \setminus K$, $|f| \leq |f - f_{n_\varepsilon}| + |f_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. □

Proposition 3.1.4. *Les espaces $\mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ sont séparables.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est séparable. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts, i.e. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ [1]. Comme $\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$, il suffit de montrer que chacun des $\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ est séparable (pour la norme uniforme sur Ω).

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact et ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Comme $\overline{\omega}$ est compact, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ est séparable d'après le Corollaire 2.2.5. Il existe donc une famille $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit $(r_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Comme $\mathcal{C}_K(\omega)$ est un sous ensemble de $\mathcal{C}(\overline{\omega})$, il existe $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell) \neq \emptyset$. Pour de tels couples (k,ℓ), on choisit arbitrairement une fonction $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell)$ de sorte que l'ensemble (dénombrable) $D := \{g_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\omega)$ (pour la norme uniforme sur $\overline{\omega}$). En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\ell_0} < \varepsilon/2$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_\omega |f - f_{k_0}| < r_{\ell_0}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_{k_0}, r_{\ell_0}) \neq \emptyset$ de sorte que

$$\sup_\omega |f - g_{k_0,\ell_0}| \leq \sup_\omega |f - f_{k_0}| + \sup_\omega |f_{k_0} - g_{k_0,\ell_0}| \leq 2r_{\ell_0} < \varepsilon.$$

Comme chacune des fonctions $g_{k,\ell}$ sont à support dans K qui est un sous-ensemble compact de ω, on peut les étendre par 0 sur $\Omega \setminus \omega$ en des fonctions $\tilde{g}_{k,\ell}$ qui sont donc dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} = \{\tilde{g}_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ est donc dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ (pour la norme uniforme sur Ω). □

3.2 Mesures de Radon positives

On rappelle qu'une *mesure de Borel* sur Ω est une mesure définie sur la *tribu des Boréliens* $\mathcal{B}(\Omega)$ de Ω (la plus petite tribu contenant les ouverts de Ω et donc aussi les fermés de Ω). On appelle *mesure de Radon positive* une mesure de Borel sur Ω finie sur les compacts. Toute mesure de Radon positive μ définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ des fonctions continues à support compact dans Ω. En effet, l'intégrale

$$\int_\Omega f\, d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \mathrm{Supp}(f)$ le support (compact) de f, on a

$$\int_K |f|\, d\mu \leq \mu(K) \max_K |f| < +\infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_\Omega f\, d\mu$$

1. On peut par exemple consiérer $K_n = \left\{x \in \Omega :\ |x| \leq n \text{ et } \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\Omega)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.2.1}$$
$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ avec } f \geq 0. \tag{3.2.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 3.2.1 (**Théorème de représentation de Riesz**). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (3.2.1) et (3.2.2)). Il existe une unique mesure de Radon positive μ sur Ω telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega). \tag{3.2.3}$$

De plus, pour tout $E \subset \mathcal{B}(\Omega)$,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) :\ E \subset V,\ V \textit{ ouvert}\}, \tag{3.2.4}$$

et pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) :\ K \subset U,\ K \textit{ compact}\}. \tag{3.2.5}$$

Dans la preuve de l'existence, nous utiliserons le résultat suivant.

Lemme 3.2.2 (**Partition de l'unité**). *Soient $V_1, \dots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe des fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ sur K.*

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ qui sont contenues dans V_i. Alors K_i est un compact contenu dans V_i et $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$, on pose alors

$$f_i(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_i)}{\mathrm{dist}(x, K) + \sum_{j=1}^n \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_j)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

qui satisfait bien les propriétés souhaitées. □

Pour tout ouvert $V \subset \Omega$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) :\ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{3.2.6}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $E \subset \Omega$ en posant

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(V) :\ E \subset V,\ V \text{ ouvert}\}.$$

La propriété de croissance de μ^* reste vraie au sens où $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ pour tout $E \subset F$.

Lemme 3.2.3. *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on a*

$$\mu^*(K) = \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \ \textit{sur}\ K\}.$$

En particulier, $\mu^*(K) < +\infty$. De plus, pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : \ K \subset U,\ K \ \textit{compact}\}.$$

Démonstration. Soient $K \subset \Omega$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1} g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V_t) = \sup\{L(f) : \ f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]) \text{ tel que } \mathrm{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1} L(g) < +\infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu^*(K) \leq \inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu^*(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1]),\ g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu^*(K).$$

Pour établir la propriété de régularité intérieure sur les ouverts, considérons un ouvert $U \subset \Omega$. Alors, par définition de μ^* sur les ouverts, pour tout $\alpha < \mu^*(U)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\alpha < L(f)$. Soit $K = \mathrm{Supp}(f)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Comme $f \leq g$ sur Ω, on a $L(f) \leq L(g)$, puis par passage à l'infimum par rapport à g, on obtient que $L(f) \leq \mu^*(K)$. Ceci montre l'existence d'un compact $K \subset U$ tel que $\alpha < \mu^*(K)$. □

A ce stade, nous avons défini une fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ qui est finie sur les compacts, qui satisfait la propriété de régularité extérieure (3.2.4) (par définition) et la propriété de régularité intérieure (3.2.5) sur les ouverts par le Lemme 3.2.3.

Lemme 3.2.4. *La fonction d'ensemble μ^* est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $E \subset E$, alors $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de Ω, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de Ω,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{3.2.7}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. D'après le Lemme 3.2.2, il existe des fonctions f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \le \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain $n \ge 1$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $E_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_{n=1}^\infty V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^p V_n$. En itérant (3.2.7), il vient

$$L(f) \le \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^p V_n\right) \le \sum_{n=1}^p \mu^*(V_n) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \le \mu^*(V) \le \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. $\square$

D'après le Théorème de Carathéodory, la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \Omega$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \Omega$$

est une tribu sur Ω, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. Nous allons montrer que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$.

Lemme 3.2.5. *Tout Borélien est μ^*-mesurable. En particulier, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure de Radon positive.*

Démonstration. **Etape 1 : Montrons que pour tout A, $B \subset \Omega$ avec $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, on a**

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \ge \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \Omega$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\mathrm{dist}(A, B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $U \cap V = \emptyset$. Par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \ge \mu^*(U \cup V) \ge \mu^*(U) + \mu^*(V) \ge \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu.

Etape 2 : Montrons que tous les fermés de Ω sont μ^*-mesurables. Par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset \Omega$ est fermé,

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C) \quad \text{pour tout } A \subset \Omega \text{ tel que } \mu^*(A) < +\infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(A \setminus C_n, A \cap C) \geq 1/n > 0$, l'étape 1 montre que

$$\mu^*(A \setminus C_n) + \mu^*(A \cap C) = \mu^*((A \setminus C_n) \cup (A \cap C)) \leq \mu^*(A). \tag{3.2.8}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in A : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a toujours d'après l'étape 1,

$$\sum_{k=1}^m \mu^*(R_{2k}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^m R_{2k} \right) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

et

$$\sum_{k=1}^m \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^m R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(A) < +\infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(A) < +\infty$. Comme C est fermé, on a $A \setminus C = (A \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(A \setminus C_n) \leq \mu^*(A \setminus C) \leq \mu^*(A \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $\mu^*(A \setminus C_n) \to \mu^*(A \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans (3.2.8), il vient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap C) + \mu^*(A \setminus C)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Etape 3 : Conclusion. Comme $\mathcal{A}$ contient les fermés de Ω et que la tribu $\mathcal{B}(\Omega)$ est engendrée par les fermés, on en déduit que $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure Borélienne. Comme par le Lemme 3.2.3, on a $\mu(K) = \mu^*(K) < +\infty$ (puisque les compacts sont Boréliens, on en déduit que μ est une mesure de Radon positive. □

Nous avons montré jusque là que la restriction de μ^* à la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\Omega)$ est une mesure de Radon positive qui satisfait la propriété de régularité extérieure (3.2.4) et la propriété de régularité intérieure (3.2.5) sur les ouverts. Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du Théorème de Représentation de Riesz.

Démonstration du Théorème 3.2.1. Concernant l'existence, nous avons montré dans les lemmes préliminaires l'existence d'une mesure de Radon positive μ satisfaisant les propriétés de régularité (3.2.4) et (3.2.5). Il reste à établir la propriété de représentation (3.2.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \le \int_\Omega f \, d\mu. \tag{3.2.9}$$

Soit $K := \mathrm{Supp}(f)$ et $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \cdots < y_n = b$ et $\max_{1\le i\le n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (3.2.4), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \le \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \le \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \le y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1\le i\le n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, le Théorème 3.2.2 montre l'existence d'une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.*, on peut trouver des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K. Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $0 \le h_i f \le (y_i + \varepsilon)h_i$ dans Ω, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \le \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 3.2.3 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \ge \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \le \mu(U_i) \le \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \le \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)\left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned} L(f) &\leq \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{B_i} f\, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &= \int_{\Omega} f\, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)), \end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2.9), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon positives satisfaisant la conclusion du Théorème de représentation de Riesz. Par les propriétés de régularité (3.2.4) et (3.2.5), il suffit d'établir que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Soit $\varepsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ un compact. D'après (3.2.4), il existe un ouvert V contenant K tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\chi_K \leq f \leq \chi_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_{\Omega} \chi_K\, d\mu_1 \leq \int_{\Omega} f\, d\mu_1 = L(f) = \int_{\Omega} f\, d\mu_2 \leq \int_{\Omega} \chi_V\, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ et en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2 on en déduit que cette inégalité et une égalité. $\square$

3.3 Mesures de Radon bornées

Définition 3.3.1. L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω, noté $\mathcal{M}(\Omega)$, est le dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

Grâce au théorème de représentation de Riesz (Théorème 3.2.1), on peut caractériser l'espace de mesures de Radon bornées.

Théorème 3.3.2. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe deux mesures de Borel finies μ^+ et μ^- sur Ω telles que si μ désigne la mesure signée $\mu := \mu^+ - \mu^-$, alors*

$$L(f) = \int_{\Omega} f\, d\mu := \int_{\Omega} f\, d\mu^+ - \int_{\Omega} f\, d\mu^- \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

De plus, en notant $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ la mesure (positive) variation de μ, on a

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = |\mu|(\Omega).$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ peut s'écrire comme la différence de deux formes linéaires positives.

Lemme 3.3.3. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe des formes linéaires continues positives L^+ et L^- sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) : \ f \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}^+, \, g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$, comme $0 \in \mathcal{C}^+$, on a $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|g\|_\infty \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au supremum en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, on décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors $(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f+g) = L^+(f) + L^+(g)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $pL^+(f) = L^+(pf) = L^+(qrf) = qL^+(rf)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. □

Démonstration du Théorème 3.3.2. D'après le Lemme 3.3.3, on peut décomposer $L \in \mathcal{M}(\Omega)$ comme $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues positives sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. D'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe deux mesures de Radon positives $\mu^\pm$ telles que

$$L^\pm(f) = \int_\Omega f \, d\mu^\pm \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De plus, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts (voir (3.2.6)) et par définition de la norme dans $\mathcal{M}(\Omega)$, on a

$$\mu^\pm(\Omega) = \sup_{f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])} L^\pm(f) \leq \|L^\pm\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < +\infty,$$

ce qui montre que $\mu^\pm$ sont des mesures finies. Par conséquent,

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu^+ - \int_\Omega f \, d\mu^- \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Cette inégalité peut être étendue à toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, par continuité de L et par convergence dominée.

Si $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ est telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, alors on

$$|L(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d|\mu| \leq |\mu|(\Omega),$$

puis par passage au supremum par rapport à f, $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq |\mu|(\Omega)$. Réciproquement, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonction $f^\pm \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telles que $\mu^\pm(\Omega) \leq L^\pm(f^\pm) + \varepsilon$, d'où

$$|\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) \leq L^+(f^+) + L^-(f^-) + 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, par définition de L^+, il existe $g^+ \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^+ \leq f^+$ et $L^+(f^+) \leq L(g^+) + \varepsilon$. Par ailleurs, comme

$$L^-(f^-) = L^+(f^-) - L(f^-) = \sup_{h \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq h \leq f^-} L(h) - L(f^-) = \sup_{g \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq g \leq f^-} \{-L(g)\},$$

il existe $g^- \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^- \leq f^-$ et $L^-(f^-) \leq -L(g^-) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$|\mu|(\Omega) \leq L(g^+ - g^-) + 4\varepsilon$$

et comme $-1 \leq -f^- \leq -g^- \leq g^+ - g^- \leq g^+ \leq f^+ \leq 1$, on en déduit que

$$|\mu|(\Omega) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + 4\varepsilon$$

et la conclusion vient du fait que $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

On rappelle qu'une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur un ensemble X est une famille $\mathcal{A}$ de parties de X vérifiant :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Une *mesure* (positive) est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ qui satisfait

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi, f est $\mathcal{A}$-mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$.

4.1 Premières définitions et propriétés

Définition 4.1.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{R} \ \mathcal{A}\text{-mesurable} : \ \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < +\infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

Proposition 4.1.2 (Inégalité de Hölder). *Soient* $1 \le p \le \infty$ *et* $p' \ge 1$ *son exposant conjugué défini par* $1/p + 1/p' = 1$ *(par convention* $p' = 1$ *si* $p = \infty$*, et* $p' = \infty$ *si* $p = 1$*). Si* $f \in \mathcal{L}^p(X)$ *et* $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ *alors* $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ *et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}.$$

Démonstration. Par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, pour $a, b > 0$ et $1 \le p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p}\log(a^p) + \frac{1}{p'}\log(a^{p'}) \le \log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}$$

qui reste vraie pour tout $a \ge 0$ et $b \ge 0$. En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}$ et en intégrant sur X, on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. $\square$

Proposition 4.1.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour* $1 \le p \le \infty$ *et pour tout* f, $g \in \mathcal{L}^p(X)$*, on a*

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}.$$

Démonstration. On commence par le cas $p = \infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)| \le \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ et $|g(x)| \le \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ pour μ-presque tout $x \in X$, d'où

$$|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)},$$

pour μ-presque tout $x \in E$, et donc $\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \le \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

Si $p = 1$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_E |f + g|\, d\mu \le \int_X (|f| + |g|)\, d\mu \le \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(X)}.$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\|f + g\|^p_{\mathcal{L}^p(X)} &= \int_E |f + g|^p\, d\mu = \int_X |f + g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\
&\le \int_X |f||f + g|^{p-1}\, d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\
&\le (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \left(\int_X (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)}\, d\mu\right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \|f + g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(X)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. $\square$

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$ n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

Proposition 4.1.4. *Soit $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable telle que*

$$\int_X f \, d\mu = 0.$$

Alors $f(x) = 0$ μ-presque pour tout $x \in X$.

Démonstration. On considère les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f \, d\mu \leq \int_E f \, d\mu = 0,$$

et donc, $\mu(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ μ-p.p. dans X. $\square$

Etant données deux fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f et $g : X \to [-\infty, +\infty]$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ μ-presque pour tout $x \in X$. On peut montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ noté dorénavant $L^p(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(E)$, on notera (temporairement) $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \inf_{f\in[f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, nous identifierons systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

Définition 4.1.5. Soit $f \in L^p(X)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(X)$.

Proposition 4.1.6 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \le p \le \infty$ et $p' \ge 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{p'}(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et*

$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 4.1.7 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \le p \le \infty$ et tout f, $g \in L^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposition 4.1.8. *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'application $L^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$. De plus, pour $p = 2$, l'application*

$$(f, g) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_X fg \, d\mu.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X)$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.1.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. dans X, et donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(X)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_X fg \, d\mu$ est bien définie pour f et $g \in L^2(X)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) symétrique définie positive (d'après la Proposition 4.1.4) ce qui assure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(X)$. □

4.2 Complétude

Théorème 4.2.1 (Riesz-Fischer). *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'espace $L^p(X)$ est complet.*

Démonstration. Supposons d'abord que $1 \le p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j \ge 1}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \le 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \ge 1.$$

Soit $u_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k \ge 1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \le \sum_{j=1}^k 2^{-j} \le 1.$$

Par conséquent, le théorème de la convergence monotone assure que

$$\int_X |u|^p \, d\mu = \lim_{k \to +\infty} \int_X |u_k|^p \, d\mu \le 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, ce qui montre que $u(x) < \infty$ pour μ-presque tout $x \in X$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big) & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < +\infty, \\ 0 & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = +\infty \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable et comme la somme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big)$$

se téléscope, on en déduit que $f_{n_j} \to f$ μ-p.p. dans X. De plus, le lemme de Fatou assure que

$$\int_X |f|^p \, d\mu \leq \int_X |f_{n_1}|^p \, d\mu + \int_X \liminf_{k\to+\infty} |u_k|^p \, d\mu \leq \int_X |f_{n_1}|^p \, d\mu + 1 < \infty,$$

ce que assure que $f \in L^p(X)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(X)$, le théorème de la convergence dominée montre que $f_{n_j} \to f$ dans $L^p(X)$. Montrons que toute la suite $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit j assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(X)$, alors il existe un ensemble μ-négligeable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \qquad \text{pour tout } x \in X \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.2.1}$$

Donc si $x \in X \setminus A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(X)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (4.2.1), il vient $|f(x)| \leq M$ μ-presque pour tout $x \in X$ soit $f \in L^\infty(X)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (4.2.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et μ-presque tout $x \in X$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $L^\infty(X)$. $\square$

Corollaire 4.2.2. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach et $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.*

4.3 Résultats de densité

Théorème 4.3.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'ensemble des fonctions étagées est dense dans $L^p(X)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(X)$, en décomposant $f = f_+ - f_-$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f \geq 0$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définies de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles $\mathcal{A}$-mesurables

$$E_{n,k} := \left\{x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad F_n := \{f \geq n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge μ-presque partout vers f.

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \geq \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ presque pour tout $x \in X$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \leq 2^{-n} \to 0$.

Si $1 \leq p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \to 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \leq 2^p f(x)^p$ μ-presque pour tout $x \in X$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \to 0$. □

Dans la suite, nous allons nous restreindre au cas de la mesure de Lebesgue, notée $\mathcal{L}^N$. Afin de montrer un résultat de densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue, nous aurons besoin d'une propriété de régularité de la mesure de Lebesgue.

Proposition 4.3.2. *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borélien, alors*

$$\mathcal{L}^N(E) = \inf\{\mathcal{L}^N(U) : U \text{ ouvert avec } E \subset U\} = \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}.$$

Démonstration. La régularité extérieure

$$\mathcal{L}^N(E) = \inf\{\mathcal{L}^N(U) : U \text{ ouvert avec } E \subset U\}$$

est une conséquence immédiate de la construction de la mesure de Lebesgue.

Montrons maintenant la régularité intérieure

$$\mathcal{L}^N(E) = \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}.$$

On a toujours que $\mathcal{L}^N(E) \geq \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\}$. Pour établir la deuxième inégalité, on applique la régularité extérieure à l'ensemble borné $\overline{B}(0,n) \setminus E$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un ensemble ouvert $V_n \supset \overline{B}(0,n) \setminus E$ tel que $\mathcal{L}^N(V_n) \leq \mathcal{L}^N(\overline{B}(0,n)\setminus E)+\varepsilon$. Soit $F_n := V_n^c$ qui est un fermé satisfaisant $F_n \subset E \cup \overline{B}(0,n)^c$ et

$$\mathcal{L}^N((E\setminus F_n)\cap\overline{B}(0,n)) = \mathcal{L}^N((V_n\setminus(E^c))\cap\overline{B}(0,n)) = \mathcal{L}^N(V_n\cap\overline{B}(0,n)) - \mathcal{L}^N(\overline{B}(0,n)\setminus E) \leq \varepsilon.$$

On pose $K_n = F_n \cap \overline{B}(0,n)$ qui est un ensemble compact satisfaisant $K_n \subset E$ et

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^N(E \cap \overline{B}(0,n)) &= \mathcal{L}^N((E \setminus F_n) \cap \overline{B}(0,n)) + \mathcal{L}^N(K_n) \leq \mathcal{L}^N(K_n) + \varepsilon \\ &\leq \sup\{\mathcal{L}^N(K) : K \text{ compact avec } K \subset E\} + \varepsilon.\end{aligned}$$

Comme par ailleurs, $\mathcal{L}^N(E \cap \overline{B}(0,n)) \to \mathcal{L}^N(E)$ on obtient la deuxième inégalité en faisant tendre $n \to +\infty$ puis $\varepsilon \to 0$. □

Cette propriété de régularité de la mesure de Lebesgue permet de montrer la densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue pour $p < \infty$.

Théorème 4.3.3. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega)$. D'après le Théorème 4.3.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée g telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée à support compacte peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $L^p(\Omega)$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Le Théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{K_n} g\|_p \to 0$ quand $n \to +\infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable A tel que $\overline{A}$ est compact et $\overline{A} \subset \Omega$ (autrement dit χ_A est à support compact dans Ω). En particulier, comme A est borné, on a $\mathcal{L}^N(A) < +\infty$. Par conséquent la Proposition 4.3.2 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert U et d'un compact K tels que $K \subset A \subset U$ et $\mathcal{L}^N(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $h = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\chi_K \leq h \leq \chi_U$,

$$\int_\Omega |h - \chi_A|^p \, dx \leq \mathcal{L}^N(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant que l'ensemble des fonctions régulières et à support compact est dense dans les espaces de Lebesgue. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles à tout ordre et telles que $\mathrm{Supp}(f)$ est un compact inclu dans Ω.

Définition 4.3.4. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \overline{B}(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$. On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} \, dx \right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

Définition 4.3.5. Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1(K)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et on note $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$) on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\, dy \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4.3.6. Notons que l'intégrale est bien défnie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $\overline{B}(x, \frac{1}{n})$, elle est bornée sur cet ensemble et f est intégrable sur cet ensemble.

Lemme 4.3.7. *Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus*
- *si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(f * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$;*
- *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre par convergence dominée que $f * \rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. Montrons à présent qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, en notant $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x + he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x + he_i - y) - \rho_n(x-y)}{h} f(y)\, dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\rho_n(x+h-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y) \to \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)$ quand $h \to 0$ car ρ_n est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\left|\frac{\rho_n(x+he_i-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y)\right| \leq \max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}(y)|f(y)|$ car $\rho_n(x + y - he_i) = \rho_n(x-y) = 0$ si $|y - x| > 2$. Notons que $\partial_{x_i}\rho_n$ étant également $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ elle est bornée sur $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}|f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f * \rho_n(x + he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i}\rho_n(x-y) f(y)\, dy,$$

ce qui montre que $f * \rho_n$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et $\partial_{x_i}(f * \rho_n) = f * (\partial_{x_i}\rho_n)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On montre de nouveau par convergence dominée que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\mathbb{R}^N$, ce qui établit que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$. Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}(0, R)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0, R)$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $\overline{B}(0, R)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. De plus si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \mathrm{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \mathrm{Supp}(f)$ et donc $f(x-y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = \int_{\mathrm{Supp}(\rho_n)} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f * \rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclu dans $\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n) = \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$ implique

$|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in \overline{B}(0, \frac{1}{n})$, on a $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis on intègre sur $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\, dy \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de δ donc ε) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $|x| > R + \frac{1}{n}$, on peut élever l'expression (4.3.1) à la puissance p, puis par intégration,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx = \int_{\overline{B}(0, R+\frac{1}{n})} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^N(\overline{B}(0, R+1)), \tag{4.3.2}$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_p\, \mathcal{L}^N(K)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 4.3.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Par ailleurs, d'après (4.3.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_p \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Par conséquent,

$$\|f - f * \rho_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g * \rho_n\|_p + \|(g - f) * \rho_n\|_p \leq 2\varepsilon + \|(g - f) * \rho_n\|_p.$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$,

$$\begin{aligned} |(g - f) * \rho_n(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right|^p \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\, dy \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à x et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g - f) * \rho_n\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p\, dx \right) \rho_n(y)\, dy = \|g - f\|_p^p.$$

Par conséquent, $\|f - f * \rho_n\|_p \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. $\square$

Corollaire 4.3.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.3.3, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On étend g par zéro en dehors de Ω et on note $\tilde{g}$ cette extension. Alors $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{Supp}(\tilde{g}) \subset \Omega$. D'après le Lemme 4.3.7, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{Supp}(\tilde{g} * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(\tilde{g}) + \overline{B}(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\|\tilde{g} * \rho_n - \tilde{g}\|_p \leq \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde{g} * \rho_n|_\Omega \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - \tilde{g} * \rho_n\|_p \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

4.4 Séparabilité

Nous somme à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

Proposition 4.4.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compact, *i.e.*, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. D'après le Corollaire 2.2.5, $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable par rapport à la norme uniforme sur K_n. Or les ensembles K_n étant bornés, la convergence uniforme sur K_n implique la convergence dans $L^p(K_n)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ car

$$\int_{K_n} |f - g|^p \, dx \leq \mathcal{L}^N(K_n) \sup_{K_n} |f - g|^p \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}(K_n).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable pour la convergence dans $L^p(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble D_n dénombrable dense dans $\mathcal{C}(K_n)$ pour la convergence dans $L^p(K_n)$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de D en une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, chacune des fonctions f_i est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de Ω. On étend alors f_i par zéro sur Ω, et on note $\tilde{f}_i$ cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de $L^p(\Omega)$. Montrons qu'il est dense dans $L^p(\Omega)$. Pour ce faire, soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 4.3.3, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(g) \subset K_n$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g - h\|_{L^p(K_n)} \leq \varepsilon$. Soit $\tilde{h}$ l'extension par zéro de h sur Ω. Alors $\tilde{h} \in \tilde{D}$ et comme $g = 0$ sur $\Omega \setminus K_n$, il vient

$$\int_\Omega |\tilde{h} - g|^p \, dx = \int_{K_n} |h - g|^p \, dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de $\tilde{D}$ dans $L^p(\Omega)$. □

Proposition 4.4.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X := \{\chi_{B(x,r)} : \ B(x,r) \subset \Omega\}$ qui est une famille non dénombrable de $L^\infty(\Omega)$. Si χ, $\chi' \in X$ sont telles que $\chi \neq \chi'$, alors $\|\chi - \chi'\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^\infty(\Omega)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \to \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de D dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme χ_1 et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui montre l'injectivité de Φ. L'ensemble X étant non dénombrable, on aboutit à une contradition. □

4.5 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

Théorème 4.5.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

(i) $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < +\infty$;

(ii) $\sup_{\|y\|\leq\delta} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p \, dx \to 0$ *quand* $\delta \to 0$.

Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la suite $(f_{n|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(K)$.

Démonstration. Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la Définition 4.3.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in K$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y)|\rho_k(y)\, dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de n et de x. Par ailleurs, si x et $x' \in K$,

$$\begin{aligned}
|f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)|\rho_k(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-x'+z) - f_n(z)|\rho_k(x'-z)\, dz \\
&\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \left(\sup_{\|y\|\leq\|x-x'\|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p \, dz \right)^{1/p} \\
&= \omega_k(\|x-x'\|),
\end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$, ce qui montre l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_n * \rho_k{}_{|_K})_{n\in\mathbb{N}}$. Le Théorème d'Ascoli-Arzela combiné avec un principe d'extraction diagonal assure l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_k{}_{|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est borné on en déduit que $(f_{\sigma(n)} * \rho_k{}_{|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(K)$.

Nous allons à présent montrer que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le Théorème de Riesz-Fisher. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} &\le \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n)} * \rho_k\|_{L^p(K)} \\ &\quad + \|f_{\sigma(n)} * \rho_k - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)} + \|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)}. \quad (4.5.1)\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Supp}(\rho_k) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{k})$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\, dy = 1$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)| \le \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|\rho_k(y)\, dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p, en intégrant par rapport à $x \in K$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx &\le \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} \left(\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|^p\, dx \right) \rho_k(y)\, dy \\ &\le \sup_{\|y\|\le 1/k} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_n(x) - f_n(x-y)|^p\, dx.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}(x)|\, dx \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}{}_{|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(K)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \ge N_0$,

$$\|f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(K)} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si $m, n \ge N_0$, (4.5.1) donne $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \le \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est Cauchy dans $L^p(K)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. $\square$

Chapitre 5

Dualité dans les espaces de Lebesgue

5.1 Le cas Hilbertien de L^2

5.1.1 Quelques rappels sur les espaces de Hilbert

On rappelle qu'un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel H muni d'un *produit scalaire* $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to [0, +\infty[$ qui est une

(i) *forme bilinéaire* : $u \mapsto \langle u, v \rangle$ est linéaire pour tout $v \in H$ et $v \mapsto \langle u, v \rangle$ est linéaire pour tout $u \in H$;

(ii) *symétrique* : $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ pour tout u, $v \in H$;

(iii) *définie positive* : $\langle u, u \rangle > 0$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$;

et qui est complet pour la norme Hilbertienne $\|u\|_H := \sqrt{\langle u, u \rangle}$ associée au produit scalaire.

Les résultats suivants sont spécifiques aux espaces de Hilbert et y jouent un rôle fondamental.

Théorème 5.1.1 (Projection orthogonale). *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert et C un sous-ensemble de H convexe, fermé et non vide. Pour tout $u \in H$, il existe un unique élément $P_C(u) \in C$, appelé la projection orthogonale de u sur C, tel que*

$$\|u - P_C(u)\|_H = \min_{v \in C} \|u - v\|_H.$$

De plus, $P_C(u)$ est caractérisé par

$$P_C(u) \in C, \quad \langle u - P_C(u), v - P_C(u) \rangle \leq 0 \text{ pour tout } v \in C. \tag{5.1.1}$$

Démonstration. On considère le problème de minimisation

$$\alpha := \inf_{v \in C} \|u - v\|_H^2 \tag{5.1.2}$$

Comme $C \neq \emptyset$, on a $\alpha \in [0, +\infty[$. On considère alors une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de H telle que pour tout $n \geq 1$,

$$v_n \in C, \quad \alpha \leq \|v_n - u\|_H^2 \leq \alpha + \frac{1}{n}. \tag{5.1.3}$$

Par convexité de C, $(v_n + v_m)/2 \in C$ pour tout m, $n \geq 1$, et donc l'inégalité du parallélogramme montre que

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \left\| \frac{v_m + v_n}{2} - u \right\|_H^2 &= \left\| \frac{v_m - u}{2} + \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&= 2\left\| \frac{v_m - u}{2} \right\|_H^2 + 2\left\| \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 - \left\| \frac{v_m - u}{2} - \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|_H^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|v_m - v_n\|_H^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans H. Il existe donc un élément $v \in H$ tel que $v_n \to v$. L'ensemble C étant fermé, on en déduit que $v \in C$ et par passage à la limite dans (5.1.3) que $\alpha = \|v - u\|_H^2$. Ceci montre l'existence d'une solution au problème de minimisation (5.1.2). Quant à l'unicité, si $v_1 \in C$ et $v_2 \in C$ sont deux solutions, alors par convexité de C, on a $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in C$, d'où

$$\alpha \leq \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} - u \right\|_H^2 = \frac{1}{2}\|v_1 - u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_2 - u\|_H^2 - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2 = \alpha - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2,$$

ce qui montre que $\|v_1 - v_2\|_H = 0$ et donc que $v_1 = v_2$.

Montrons à présent que l'unique solution de (5.1.2) est caractérisée par (5.1.1). Si $P_C(u)$ est l'unique solution de (5.1.2), alors $P_C(u) \in C$ et, par convexité de C, $P_C(u) + t(v - P_C(u)) \in C$ pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $v \in C$. Donc

$$\alpha \leq \|u - P_C(u) - t(v - P_C(u))\|_H^2 = \alpha - 2t\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle + t^2\|v - P_C(u)\|_H^2.$$

En divisant par t puis en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient $\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle \leq 0$ comme attendu. Réciproquement, supposons (5.1.1), alors pour tout $v \in C$,

$$\begin{aligned}
\|v - u\|_H^2 &= \|v - P_C(u) + P_C(u) - u\|_H^2 \\
&= \|v - P_C(u)\|_H^2 + 2\langle v - P_C(u), P_C(u) - u\rangle + \|P_C(u) - u\|_H^2 \geq \|P_C(u) - u\|_H^2,
\end{aligned}$$

ce qui montre, avec $P_C(u) \in C$, que $P_C(u)$ est la solution au problème de minimisation (5.1.2). □

Dans le cas particulier où C est un sous espace vectoriel fermé de H, le théorème de la projection orthogonale permet de décomposer l'espace H en la somme directe de C et de son orthogonal.

Proposition 5.1.2. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de H et $u \in H$. Alors la projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est caractérisée par*

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), v\rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F.$$

De plus, en notant $F^\perp = \{v \in H : \langle v, u\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in F\}$ l'orthogonal de F, on a la décomposition

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. Comme F est un sous espace vectoriel de H, il est non vide (car il contient l'origine) et convexe. La projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est donc bien définie et est caractérisée par

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), w - P_F(u)\rangle \leq 0 \text{ pour tout } w \in F.$$

Si $v \in F$ est arbitraire, alors $w = P_F(u) \pm v \in F$ car F est un sous espace vectoriel, et donc $\pm\langle u - P_F(u), v\rangle \leq 0$, autrement dit $\langle u - P_F(u), v\rangle = 0$. L'implication réciproque est immédiate.

Tout élément $u \in H$ peut donc s'écrire $u = P_F(u) + (u - P_F(u))$, où $P_F(u) \in F$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$ d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur F établie précédemment. Par ailleurs, comme $F^\perp \cap F = \{0\}$, alors on a bien que $H = F \oplus F^\perp$. □

Un corollaire du résultat précédent est l'identification du dual d'un espace de Hilbert H avec H lui même.

Théorème 5.1.3 (Riesz). *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $L \in H'$. Il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$L(u) = \langle f, u\rangle \qquad \text{pour tout } u \in H.$$

De plus, $\|L\|_{H'} = \|f\|_H$.

Démonstration. Si $L = 0$, on prend $f = 0$. Sinon, on pose $M = \mathrm{Ker}(L)$ qui est un sous espace vectoriel fermé de H. Comme d'après la Proposition 5.1.2, $H = M \oplus M^\perp$, on en déduit que $M^\perp \neq \{0\}$ et il existe donc un élement $e \in M^\perp$ avec $e \neq 0$. Alors $L(e) \neq 0$ (car sinon $e \in M$ et donc $e = 0$). On en déduit que $u - \frac{L(u)}{L(e)}e \in M$ donc $\langle u, e\rangle = \frac{L(u)}{L(e)}\|e\|_H^2$, soit $L(u) = \langle \frac{L(e)}{\|e\|_H^2}e, u\rangle$ pour tout $u \in H$, d'où l'existence. Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in H$ sont deux représentants de L, alors $\langle f_1 - f_2, u\rangle = 0$ pour tout $u \in H$, en particulier le choix de $u = f_1 - f_2$ donne $\|f_1 - f_2\|_H^2 = 0$ soit $f_1 = f_2$. Enfin en prenant $u = f/\|f\|_H$, on obtient $\|L\|_{H'} \geq \|f\|_H$, l'autre inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

5.1.2 Application à L^2

En tant qu'espace de Hilbert, le Théorème de Riesz (Théorème 5.1.3) permet d'identifier le dual de L^2 avec lui même.

Théorème 5.1.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $L \in [L^2(X)]'$, il existe un unique $f \in L^2(X)$ tel que pour tout $g \in L^2(X)$,*

$$L(g) = \int_X fg\, d\mu, \quad \|L\|_{[L^2(X)]'} = \|f\|_2.$$

5.2 Le cas L^p, $1 \leq p < \infty$

Le cas général est plus difficile. Il repose sur le théorème de Radon-Nikodým lui même conséquence du Théorème 5.1.4. Nous donnons ici une version loin d'être optimale, mais toutefois suffisante pour la suite.

Théorème 5.2.1 (Radon-Nikodým). *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et λ et ν deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que λ est absolument continue par rapport à ν : si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\nu(A) = 0$, alors $\lambda(A) = 0$. Alors, il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \nu)$ avec $f \geq 0$ ν-p.p. telle que*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu \qquad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. **Etape 1 :** On suppose ici que $\lambda \leq \nu$. Soit $u : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable, d'après le Théorème 4.3.1 de densité des fonctions étagées, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions positives étagées telles que $u_n \to u$ simplement dans X. Comme u_n est étagée, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, donc

$$\int_X u_n \, d\lambda \leq \int_X u_n \, d\nu,$$

puis, par convergence monotone, on obtient que

$$\int_X u \, d\lambda \leq \int_X u \, d\nu.$$

En prenant $u = |f|^2$ avec $f \in L^2(X, \nu)$, on obtient que

$$\int_X |f|^2 \, d\lambda \leq \int_X |f|^2 \, d\nu.$$

Ensuite, λ étant une mesure finie, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(X, \lambda)$ montre que

$$\int_X |f| \, d\lambda \leq \sqrt{\lambda(X)} \left(\int_X |f|^2 \, d\nu \right)^{1/2},$$

de sorte que $L^2(X, \nu) \subset L^1(X, \lambda)$. Ceci montre alors que l'application $\Phi : L^2(X, \nu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(g) = \int_X g \, d\lambda,$$

est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $L^2(X, \nu)$. Le Théorème 5.1.4 nous donne alors l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(X, \nu)$ telle que

$$\Phi(g) = \int_X fg \, d\nu = \int_X g \, d\lambda.$$

Comme la mesure ν est finie, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a que $\chi_A \in L^2(\mathbb{R}, \nu)$ et donc

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu,$$

ce qui est l'inégalité demandée. Montrons de plus que $f(x) \in [0,1]$ pour ν-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \lambda(\{f \leq -1/n\}) = \int_{\{f \leq -1/n\}} f\, d\nu \leq -\frac{1}{n}\nu(\{f \leq -1/n\}) \leq 0,$$

ce qui montre que $\nu(\{f \leq -1/n\}) = \lambda(\{f \leq -1/n\}) = 0$. Comme $\{f < 0\} = \bigcup_n \{f \leq -1/n\}$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f < 0\}) = 0$. De même

$$\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) \geq \lambda(\{f \geq 1 + 1/n\}) = \int_{\{f \geq 1+1/n\}} f\, d\nu \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}),$$

ce qui montre que $\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) = 0$. Comme $\{f > 1\} = \bigcup_n (\{f \geq 1 + 1/n\})$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f > 1\}) = 0$.

Etape 2 : On suppose maintenant que λ est absolument continue par rapport à ν. Il s'ensuit que les mesures λ et $\nu + \lambda$ sont finies et $\lambda \leq \lambda + \nu$, de sorte qu'on peut appliquer la conclusion de l'étape 1. Il existe donc une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f \in L^1(X, \nu + \lambda)$ telle que $f(x) \in [0,1]$ pour $(\nu + \lambda)$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\nu + \int_A f\, d\lambda,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit

$$\int_A f\, d\nu = \int_A (1 - f)\, d\lambda. \tag{5.2.1}$$

Comme $\nu \leq \nu + \lambda$ et $\lambda \leq \nu + \lambda$, alors f prend ses valeurs dans $[0,1]$ ν-p.p. et λ-p.p. Par approximation (voir la Proposition 4.3.1) et convergence monotone, on obtient également que

$$\int_X fg\, d\nu = \int_X (1 - f)g\, d\lambda \tag{5.2.2}$$

pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable $g : X \to \mathbb{R}^+$. En notant $Z := \{f = 1\}$, on a d'après (5.2.1) que $\nu(Z) = 0$ et donc que $\lambda(Z) = 0$. Définissons alors $\bar{f} = \frac{f}{1-f}\chi_{Z^c}$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et positive, il vient donc en prenant $g = \frac{\chi_{A \setminus Z}}{1-f}$ dans (5.2.2)

$$\lambda(A) = \lambda(A \setminus Z) = \int_X (1 - f)\frac{\chi_{A \setminus Z}}{1 - f}\, d\lambda = \int_A \bar{f}\, d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Le fait que $\bar{f} \in L^1(\mathbb{R}, \nu)$ vient du fait que λ est une mesure finie. □

Nous aurons également besoin de décomposer n'importe quelle forme linéaire continue sur L^p comme la dfférence entre deux formes linéaires continues positives.

Lemme 5.2.2. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe des formes linéaires continue positives L^+ et L^- sur $L^p(X)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in L^p(X).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in L^p(X) :\ f \geq 0\ \mu\text{-p.p. sur } X\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) :\ g \in \mathcal{C}^+,\ g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$, $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au sup en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résulltat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. On décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in L^p(X)$, alors $(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f+g) = L^+(f) + L^+(g)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in L^p(X)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f_1 - f_2\|_p.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $L^p(X)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $L^+(qrf) = qL^+(rf) = L^+(pf) = pL^+(f)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquent que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $L^p(X)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $L^p(X)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. $\square$

Venons en maintenant à la caractérisation du dual de L^p.

Théorème 5.2.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, i.e., il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que*

$$\mu(E_n) < +\infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Soit $1 \leq p < \infty$ et p' l'exposant conjugué donné par $1/p + 1/p' = 1$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X fg\, d\mu \qquad \text{pour tout } g \in L^p(X)$$

et

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} = \|f\|_{L^{p'}(X)}.$$

Par conséquent, le dual de $L^p(X)$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(X)$.

Avant de procéder à la preuve du Théorème 5.2.3, remarquons que celui-ci s'applique à la mesure de Lebesgue qui est σ-finie puisque $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\geq 1} B(0,n)$ et, $\mathcal{L}^N$ étant finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N(B(0,n)) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Posons $F_0 = E_0$ et pour tout $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ de sorte que $\mu(F_n) < +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et les F_n sont deux à deux disjoints.

Etape 1 : Supposons tout d'abord que L et une forme linéaire continue positive. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu_n(A) = \mu(A \cap F_n), \quad \lambda_n(A) := L(\chi_{A\cap F_n}).$$

Alors ν_n est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Quant à λ_n, on a clairement que $\lambda_n(\emptyset) = L(0) = 0$. Par ailleurs, si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \lim_{k\to+\infty} \chi_{\bigcup_{j=0}^k A_j} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^k \chi_{A_j} \qquad \text{dans } X$$

et

$$0 \leq \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap F_n} - \sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} = \chi_{\bigcup_{j>k} A_j\cap F_n} \leq \chi_{F_n} \in L^p(X).$$

Le Théorème de la convergence dominée montre alors que $\sum_{j=0}^{k} \chi_{A_j \cap F_n} \to \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap F_n}$ dans $L^p(X)$. Donc, par continuité et linéarité de L,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = L\left(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}\right)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} L\left(\sum_{j=0}^{k} \chi_{A_j\cap F_n}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=0}^{k} L\left(\chi_{A_j\cap F_n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(A_j),$$

ce qui montre que λ_n est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus comme

$$\lambda_n(A) = L(\chi_{A\cap F_n}) \le \|L\|_{[L^p(X)]'} \mu(A\cap F_n)^{1/p} = \|L\|_{[L^p(X)]'} \nu_n(A)^{1/p}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, on constate d'une part que λ_n est absolument continue par rapport à ν_n, et d'autre part que λ_n est une mesure finie. Le Théorème de Radon-Nikodým montre alors l'existence d'une fonction $f_n \in L^1(X, \nu_n)$ telle que $f_n \ge 0$ ν_n-p.p. et

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\nu_n = \int_{A\cap F_n} f_n \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Par linéarité de L, on en déduit que si g est une fonction étagée positive,

$$L(g\chi_{F_n}) = \int_{F_n} f_n g \, d\mu,$$

puis par approximation (voir la Proposition 4.3.1) et convergence monotone, l'égalité précédente s'étend à toute fonction positive $g \in L^p(X)$. En posant $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \chi_{F_n}$, une nouvelle application du Théorème de la convergence dominée montre que $\sum_{n=0}^{k} g\chi_{F_n} \to g$ dans $L^p(X)$, et donc par linéarité et continuité de L et convergence monotone,

$$L(g) = L\left(\sum_{n=0}^{+\infty} g\chi_{F_n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{F_n} f_n g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Montrons enfin que $g \in L^{p'}(X)$. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A\cap E_k} f \, d\mu \le \|L\|_{[L^1(X)]'} \mu(A\cap E_k).$$

En choisissant $A = \{f \ge \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A\cap E_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mu(A) = 0$ en faisant tendre $k \to +\infty$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \le \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et $\|f\|_\infty \le \|L\|_{[L^1(X)]'}$. Si en revanche $1 < p < \infty$, on pose $g_{n,k} = f^{p'-1}\chi_{\{f\le n\}\cap E_k}$. Vérifions que $g_{n,k} \in L^p(X)$:

$$\int_X |g_{n,k}|^p \, d\mu = \int_{\{f\le n\}\cap E_k} |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_{\{f\le n\}\cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu \le n^{p'} \mu(E_k) < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu = L(g_{n,k}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g_{n,k}\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'}\left(\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p},$$

ce qui implique que

$$\left(\int_{\{f\leq n\}\cap E_k} |f|^{p'}\,d\mu\right)^{1/p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ puis $k \to +\infty$ et par application du Théorème de la convergence monotone, il vient

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'},$$

ce qui montre bien que $f \in L^{p'}(X)$.

On a donc montré l'existence d'une fonction positive $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X f g\,d\mu \quad \text{pour toute fonction } g \in L^p(X),\ g \geq 0.$$

Si $g \in L^p(X)$ est de signe quelconque, l'égalité précédente reste vraie en décomposant g comme la différence entre sa partie positive et négative, et en utilisant la linéarité de L.

Etape 2 : D'après le Lemme 5.2.2, on peut écrire que $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues et positives sur $L^p(X)$. En appliquant l'étape 1, on obtient des fonctions $f^\pm \in L^{p'}(X)$ telles que

$$L^\pm(g) = \int_X f^\pm g\,d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

On pose $f := f^+ - f^- \in L^{p'}(X)$ de sorte que

$$L(g) = L^+(g) - L^-(g) = \int_X f^+ g\,d\mu - \int_X f^- g\,d\mu = \int_X f g\,d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on procède de même que dans l'étape 1. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, on choisit $g := \frac{f}{|f|}\chi_{A\cap\{f\neq 0\}\cap E_n} \in L^1(X)$ de sorte que

$$\int_{A\cap E_n} |f|\,d\mu = \int_X f g\,d\mu = L(g) \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\|g\|_1 \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\mu(A\cap E_n).$$

En choisissant $A = \{|f| \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A \cap E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(A) = 0$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}.$$

Si $1 < p < \infty$, on prend $g = f|f|^{p'-2}\chi_{\{f\neq 0\}}$. Notons que $g \in L^p(X)$ car

$$\int_X |g|^p \, d\mu = \int_X |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_X |f|^{p'} \, d\mu < +\infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_X |f|^{p'} \, d\mu = L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \|g\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'} \left(\int_X |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p}$$

ce qui implique que

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in L^{p'}(X)$ satisfont

$$L(g) = \int_X f_1 g \, d\mu = \int_X f_2 g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X),$$

alors on a

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Le choix $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|}\chi_{\{f_1 \neq f_2\} \cap E_n} \in L^1(X)$ pour $p = 1$ montre que

$$\int_{E_n} |f_1 - f_2| \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$ par convergence monotone, $\|f_1 - f_2\|_1 = 0$, soit $f_1 = f_2$ μ-presque partout. Si $1 < p < \infty$, alors on pose $g = (f_1 - f_2)|(f_1 - f_2|^{p'-2}\chi_{\{f_1 \neq f_2\}} \in L^p(X)$ et on obtient $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ d'où $f_1 = f_2$ μ-presque partout. □

Remarque 5.2.4. Le Théorème 5.2.3 ne couvre pas le cas $p = \infty$. En particulier, $L^1(X)$ est un sous-espace strict du dual de $L^\infty(X)$. On peut montrer (et ça n'est pas forcément très difficile !) que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, n'importe quel élément $L \in [L^\infty(X)]'$ dans le dual de $L^\infty(X)$ s'identifie avec un unique élément de l'espace $\mathrm{ba}(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui sont les applications **b**ornées et **a**dditives d'ensembles $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

- $\lambda(\emptyset) = 0$;
- $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ pour tout A, $B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$;
- la quantité

$$|\lambda|(X) := \sup\left\{\sum_{i=1}^m |\lambda(A_i)| : \{A_i\}_{1\leq i\leq m} \subset \mathcal{A} \text{ partition finie de } X\right\}$$

  est finie ;
- $\lambda(A) = 0$ si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$;

via la dualité [1]

$$L(f) = \int_X f \, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in L^\infty(X).$$

1. Sous réserve que l'intégrale par rapport à une telle "mesure finiment additive" soit correctement définie

Chapitre 6

Convergence faible*

Nous introduisons ici un autre mode de convergence, appelée convergence faible* dans le dual E' d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$. Ce mode de convergence s'appliquera notamment aux espaces de Lebesgue $L^p(X)$ pour $1 < p \leq \infty$ qui sont le dual de $L^q(X)$ (avec $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$) ou encore de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

6.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6.1.1. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E', et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La limite faible* est toujours unique car si f et g sont deux limites faible* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\langle f - g, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, puis par passage au sup en x, il vient d'après la définition de la norme dans E' que $\|f - g\|_{E'} = 0$, soit $f = g$.

Exemple 6.1.2.

1. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d'après le Théorème de Riesz (Théorème 5.1.3), la convergence faible* $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ dans H signifie que

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \text{pour tout } y \in H.$$

2. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini et $1 < p \leq \infty$, d'après le Théorème 5.2.3, la convergence faible* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^p(X)$ s'écrit

$$\int_X f_n g\, d\mu \to \int_X fg\, d\mu, \qquad \text{pour tout } g \in L^q(X)$$

où $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$.

3. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, la converge faible* vers $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ signifie que

$$\int_\Omega f\, d\lambda_n \to \int_\Omega f\, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Le résultat suivant montre que la convergence faible* fournit effectivement une notion plus faible de convergence que celle pour la topologie de la norme.

Proposition 6.1.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' qui converge (fortement) vers f, i.e., $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E'.*

Démonstration. Si $x \in E$, par définition de la norme dans E',

$$|\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f_n - f, x\rangle| \leq \|f_n - f\|_{E'}\|x\|_E \to 0,$$

ce qui établit le résultat. □

Comme le montre le résultat suivant, la réciproque est en général fausse.

Définition 6.1.4. Soit H un espace de Hilbert. On dit que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H si elle est

i) *orthornormée :* pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$;

ii) *totale :* $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans H, *i.e.*, tout élément de H est la limite d'une suite de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Notons que le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Proposition 6.1.5. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Alors $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H.*

Démonstration. Le fait que $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ résulte du fait que la base est orthonormée.

Notons $F_n := \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ qui est un sous espace fermé (car de dimension fini) de E. Par conséquent, la projection orthogonale $P_n(x)$ d'un élément $x \in H$ sur F_n est bien définie. Par ailleurs, on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

En effet, $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$\langle x - P_n(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

car $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ceci montre que $\langle x - P_n(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F_n$ et d'après la Proposition 5.1.2, que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$. Par ailleurs, le fait que la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ est orthonormée montre que

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Une nouvelle application de la Proposition 5.1.2 montre que $x = P_n(x) + x - P_n(x)$ avec $P_n(x) \in F_n$ et $x - P_n(x) \in F_n^\perp$ et, d'après Pythagore, on a que

$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

La série précédente étant convergente, son terme général tend vers zéro, soit $\langle x, e_n \rangle \to 0$, ce qui montre bien que $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H. □

Le résultat précédent nous fournit un cas de suite faiblement convergente qui ne converge pas fortement. Toutefois, en dimension finie, les deux notions de convergence coïncident.

Proposition 6.1.6. *Soient E un espace de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors $f_n \to f$ fortement dans E'.*

Démonstration. Soit $d = \dim(E) = \dim(E')$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E et $(e_1^*, \dots, e_d^*)$ la base de E' duale de $\mathcal{B}$ (i.e. $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$). Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on considère la norme suivante sur E' :

$$\|f\|^2 := \sum_{i=1}^{d} f_i^2, \qquad \text{où } f = \sum_{i=1}^{d} f_i e_i^*.$$

Comme $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', on a en particulier que $(f_n)_i = \langle f_n, e_i \rangle \to \langle f, e_i \rangle = f_i$ pour tout $i = 1, \dots, d$, et donc

$$\|f_n - f\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |(f_n)_i - f_i|^2 \to 0$$

car la somme est finie. □

6.2 Propriétés de compacité

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de bornitude et compacité. Rappelons un résultat classique des espaces métriques complets.

Théorème 6.2.1 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet.*
(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X ;
(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration. L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset. \tag{6.2.1}$$

Puisque U_0 est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \geq m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d) complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m, r_m)$ pour tout $n \geq m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (6.2.1) est vérifié. □

Les résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

Théorème 6.2.2 (Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme T_i est continue, $x \mapsto \|T_i(x)\|_F$ l'est également et donc $\{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé pour tout $i \in I$. En écrivant que $X_n = \bigcap_{i\in I} \{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$, on obtient ainsi que X_n est fermé. Par ailleurs, par hypothèse, on a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble E étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|T_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors $x_0 + r_0 x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|T_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il vient

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. □

Proposition 6.2.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' telle que $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors*

i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' ;

ii) $\|f\|_{E'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E'}$;

iii) si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration. Si $f_n \stackrel{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ et donc la suite numérique $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle| < +\infty \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Le Théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $x \in E$,

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, x\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'} \|x\|_E.$$

On divise ensuite par $\|x\|_E$ puis on passe au sup en $x \in E$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|_E} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

Enfin, si $x_n \to x$ fortement dans E, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n - f, x\rangle \\ &\leq \|f_n\|_{E'} \|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' par une constante $M > 0$ (indépendante de n), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq M\|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle| \to 0,$$

ce qui montre iii) et conclut la preuve de la Proposition. □

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible*. Il assure, dans le dual d'un espace séparable, que toute suite bornée est faible* séquentiellement relativement compacte.

Théorème 6.2.4. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E', i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

alors on peut en extraire une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faible vers un élément $f \in E'$.*

Démonstration. Soit $D = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonale. Comme la suite numérique $(\langle f_n, x_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0(n)}, x_0\rangle \to L(x_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(x_0), \dots, L(x_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \le j \le k$,

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}, x_j\rangle \to L(x_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}, x_{k+1}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}, x_{k+1}\rangle \to L(x_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_n(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)})_{n\ge k}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle \to L(x_k).$$

Montrons que, pour tout $x \in E$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\ge n(x)}$ converge. Soit donc $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un x_k tel que $\|x - x_k\|_E \le \varepsilon$. Par conséquent, pour tout m, $n \ge k$,

$$\begin{aligned} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| &\le |\langle f_{\sigma(n)}, x - x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(m)}, x - x_k\rangle| \\ &\le (\|f_{\sigma(m)}\|_{E'} + \|f_{\sigma(n)}\|_{E'})\|x - x_k\|_E + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|. \end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \le 2M\varepsilon + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \ge N_k$, $|\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| \le \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout m, $n \ge n(x) := \max(N_k, k)$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \le (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\ge n(x)}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(x)$.

On montre enfin que l'application $x \mapsto L(x)$ est linéaire et comme

$$|L(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle| \le M\|x\|_E,$$

elle est continue et donc $L \in E'$, ce qui montre que $f_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} L$ faible* dans E'. □

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, le résultat précédent s'applique en particulier aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p \le \infty$ car il s'agit de l'espace dual de $L^q(\Omega)$ pour un certain $1 \le q < \infty$ qui est séparable en vertu de la Proposition 4.4.1. Il en est de même de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de l'espace séparable $\mathcal{C}_0(\Omega)$ d'après la Proposition 3.1.4.

6.3 Convergence faible

On suppose ici que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini. L'espace $L^1(X)$ n'étant pas un espace dual, la notion de convergence faible* ne s'applique pas dans cet espace. On lui préférera la notion de convergence faible dont voici la définition dans un espace de Banach général E.

Définition 6.3.1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle \qquad \text{pour tout } f \in E'.$$

Une limite faible, quand elle existe, est toujours unique comme conséquence du théorème de Hahn-Banach sous forme analytique qui permet de calculer la norme dans E par dualité :

$$\|x\|_E = \max_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1} \langle f, x \rangle.$$

Par ailleurs, nous avons des propriétés similaires à la convergence faible* résumées dans la proposition suivante dont la démonstration est similaire à celle de la proposition 6.2.3.

Proposition 6.3.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors :*

i) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E ;

ii) $\|x\|_E \leq \liminf_n \|x_n\|_E$;

iii) si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Le cas qui nous intéressera particulièment ici est celui de $E = L^1(X)$ (dont le dual peut être identifié à $L^\infty(X)$), une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(X)$ converge faiblement vers $f \in L^1(X)$ si

$$\int_X f_n g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \qquad \text{pour tout } g \in L^\infty(X).$$

Il est immédiat de voir ici que la limite faible est unique car si f_1 et $f_2 \in L^1(X)$ sont deux limites faibles, on a pour tout $g \in L^\infty(X)$ que

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0,$$

puis en prenant $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|} \chi_{\{f_1 \neq f_2\}} \in L^\infty(X)$ que $\|f_1 - f_2\|_{L^1(X)} = 0$, soit $f_1 = f_2$.

Dans l'espace L^1, il n'y a pas d'espoir d'avoir un résultat général de compacité faible, similaire au théorème 6.2.4, comme cela peut être le cas dans L^p pour $p > 1$.

Exemple 6.3.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $L^1([0,1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

alors on a $\|f_n\|_1 = 1$. Supposons, par l'absurde, que pour une sous-suite toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1([0,1])$. Comme en particulier, $1 \in L^\infty([0,1])$, il vient que

$$1 = \int_0^1 f_n \, dx \to \int_0^1 f \, dx,$$

ce qui montre que $\int_0^1 f \, dx = 1$. Par ailleurs, si I est un intervalle fermé contenu dans $]0,1]$, alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_n = 0$ p.p. sur I, pour tout $n \geq n_0$. En choisissant $g = \chi_I \in L^\infty([0,1])$ comme fonction test, il vient

$$0 = \int_I f_n \, dx \to \int_I f \, dx.$$

En choisissant $I = [1/k, 1]$, on obtient que $\int_{1/k}^1 f \, dx = 0$ pour tout $k \geq 1$, puis par passage à la limite quand $k \to +\infty$ et par convergence dominée, $\int_0^1 f \, dx = 0$, ce qui est impossible.

L'obstruction typique à la convergence faible dans L^1 est le fait que les suites ont tendance à se concentrer pour former à la limite une mesure à la place d'une fonction intégrable. Pour éviter de type de phénomène, on introduit la notion suivante d'équi-intégrabilité qui assure que la suite ne se concentre pas sur des ensembles de mesure arbitrairement petite.

Définition 6.3.4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^1(X)$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équi-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{A}, \ \mu(A) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre d'un espace mesuré de mesure finie. Si $\mu(X) = +\infty$ (ce qui est par exemple le cas pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$), il faut de plus s'assurer que la masse de la suite de fonctions ne s'échappe pas à l'infini, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E \subset X$ tel que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\setminus E} |f_n| \, d\mu \leq \varepsilon.$$

Le résultat suivant caractérise les suites faiblement convergentes dans L^1.

Théorème 6.3.5 (Dunford-Pettis). *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'élements de $L^1(X)$.*

(i) Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(X)$ pour une fonction $f \in L^1(X)$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

(ii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, alors il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f \in L^1(X)$ telle que $f_{\sigma(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(X)$.

Remarquons toutefois que l'espace $L^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{M}(\Omega)$ en identifiant $f \in L^1(\Omega)$ avec la mesure $\mu = f\mathcal{L}^N$. Par conséquent, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de fonctions dans $L^1(\Omega)$, alors il existe une sous-suite extraite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega g \, d\mu.$$

Notons si Ω est borné et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et le Théorème de Radon-Nikodým assure l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $\mu = f\mathcal{L}^N$. Dans ce cas, on en déduit que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx.$$

Chapitre 7

Annexes

Dans chapitre, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

7.1 Théorème de Carathéodory : existence de mesures

Définition 7.1.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 7.1.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit μ^**-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par la sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 7.1.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{7.1.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (7.1.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{7.1.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (7.1.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. □

7.2 Théorème de la classe monotone : unicité de mesures

Définition 7.2.1. On appelle *classe monotone* toute famille $\mathscr{C}$ de parties de X vérfiant :

(i) $X \in \mathscr{C}$;

(ii) Si A, $B \in \mathscr{C}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathscr{C}$;

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Une tribu est toujours une classe monotone, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 7.2.2. (de la classe monotone) *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ et $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$. Comme $\mathscr{T}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$. Il s'agit maintenant de montrer l'autre inclusion.

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est stable par union finie. Par passage au complémentaire, il suffit de montrer que $\mathscr{C}$ est stable par iintersection finie. Soit $E \in \mathcal{E}$ fixé et

$$\mathscr{C}_E := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap E \in \mathscr{C}\}.$$

Comme $E = X \cap E \in \mathcal{E}$, on en déduit que $X \in \mathscr{C}_E$. Par ailleurs, si A, $B \in \mathscr{C}_E$ et $A \subset B$, alors $A \cap E \in \mathscr{C}$, $B \cap E \in \mathscr{C}$ et $A \cap E \subset B \cap E$, ce qui implique que $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathscr{C}$ et donc que $B \setminus A \in \mathscr{C}_E$. Enfin si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_E$, alors on a $A_n \cap E \in \mathscr{C}$ et $A_n \cap E \subset A_{n+1} \cap E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(\bigcup_n A_n) \cap E = \bigcup_n (A_n \cap E) \in \mathscr{C}$, soit $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}_E$. On en déduit que $\mathscr{C}_E$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, i.e.

$$A \cap E \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{C} \text{ et tout } E \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $B \in \mathscr{C}$ et

$$\mathscr{C}_B := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap B \in \mathscr{C}\}.$$

On montre de même que $\mathscr{C}_B$ est une classe monotone qui, d'après ce qui précède, contient $\mathcal{E}$. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_B$, ce qui signifie que

$$A \cap B \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A, B \in \mathscr{C}.$$

Montrons à présent que $\mathscr{C}$ est une tribu. On sait déjà que $\mathscr{C}$ contient X et est stable par passage au complémentaire. Il reste à montrer que $\mathscr{C}$ est stable par union dénombrable. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_n.$$

Comme $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie, il vient $B_n \in \mathscr{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et $\mathscr{C}$ étant une classe monotone, on en déduit que $\bigcup_n B_n \in \mathscr{C}$. Finalement, comme $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ on en déduit que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Comme $\mathscr{C}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$, on obtient l'autre inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}$. □

Corollaire 7.2.3. *Soient λ et μ deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$ qui coïncident sur les cubes ouverts. Alors $\lambda = \mu$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ la famille des cubes ouverts dans $\mathbb{R}^N$ (i.e. les boules ouvertes $B_\infty(x,r)$ de $\mathbb{R}^N$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). Clairement $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Montrons que la tribu $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. En effet, on a tout d'abord l'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'autre inclusion, on considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ et le sous ensemble dénombrable de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{F}_U := \{(B_\infty(a,r) \subset U : \ a \in U \cap \mathbb{Q}^N \text{ et } r \in \mathbb{Q}^*_+\}$$

de boules de centre rationnel et de rayon rationnel, incluses dans U. Si $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B_\infty(x,R)} \subset U$, alors il existe $a \in U \cap \mathbb{Q}^N$ tel que $\|x - a\|_\infty < R/4$. De plus, il existe $r \in \mathbb{Q}^*_+$ tel que $R/4 < r < R/2$, ce qui implique que $x \in B_\infty(a,r)$ et $B_\infty(a,r) \subset B_\infty(x,R) \subset U$. On a donc montré que

$$U = \bigcup_{B\in\mathcal{F}_U} B$$

et donc que $U \in \mathscr{T}$. Comme la tribu Borélienne est engendrée par les ouverts, on en déduit l'autre inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{T}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\lambda_n(B) := \lambda(B \cap]-n,n[^N), \quad \mu(B \cap]-n,n[^N) =: \mu_n(B).$$

Comme λ et μ sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit que λ_n et μ_n sont des mesures Boréliennes finies sur $\mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathscr{C}_n = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \ \lambda_n(A) = \mu_n(A)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Alors $\mathbb{R}^N \in \mathscr{C}_n$ car $\lambda_n(\mathbb{R}^N) = \lambda(]-n,n[^N) = \mu(]-n,n[^N) = \mu_n(\mathbb{R}^N)$ puisque $]-n,n[^N \in \mathcal{E}$. Ensuite si A, $B \in \mathscr{C}_n$ sont tels que $A \subset B$, alors $\lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B) - \lambda_n(A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) = \mu_n(B \setminus A)$ ce qui montre que $B \setminus A \in \mathcal{C}_n$. Enfin si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_n$, alors $\lambda_n(A_k) = \mu_n(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis passage à la limite quand $k \to +\infty$,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \lambda_n(A_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu_n(A_k) = \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right),$$

ce qui montre que $\bigcup_k A_k \in \mathscr{C}_n$. On a donc établi que $\mathscr{C}_n$ est une classe monotone. Comme par hypothèse $\mathscr{C}_n$ contient $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C}_n$ contient la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ qui, en vertu du théorème de la classe monotone, coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, i.e. la tribu Borélienne. On a donc établi que $\mathscr{C}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\lambda_n(B) = \mu_n(B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ou encore

$$\lambda(B \cap]-n, n[^N) = \mu(B \cap]-n, n[^N).$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, il vient $\lambda(B) = \mu(B)$. $\square$