Université Paris Saclay
Master Mathématiques et Applications
Parcours M1 Mathématiques Fondamentales
Parcours M1 Formation à l'Enseignement Supérieur

Analyse II

Jean-François Babadjian

Table des matières

Chapitre 1

Quelques rappels sur la compacité

La compacité est une notion fondamentale en analyse. A titre d'exemple elle est à la base de résultats d'existence en théorie des équations aux dérivées partielles, où l'on cherche souvent à approcher les (éventuelles) solutions d'une équation par celles d'un problème approché. Celui-ci peut être obtenu, par exemple, par discrétisation de type différences finies, éléments finis ou volumes finis (c'est l'objet de l'analyse numérique de rendre rigoureux ce type d'approches) ou par des méthodes de régularisation. On cherche ensuite à faire converger les solutions approchées vers des solutions du problème de départ en établissant des propriétés de compacité.

L'objet de ce premier chapitre est de rappeler des résultats connus sur la compacité dans les espaces métriques et les espaces vectoriels normés. On s'attachera à pointer du doigt les limites d'application de la notion classique de compacité notamment dans les espaces de dimension infinie.

1.1 Topologie dans les espaces métriques

On rappelle qu'un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une *distance* d qui est une application $d : X \times X \to [0, +\infty[$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

i) *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout x, $y \in X$;

ii) *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

iii) *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout x, y, $z \in X$.

On notera $B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ la boule ouverte de centre x et rayon r et $\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ la boule fermée.

Définition 1.1.1. Un ensemble $U \subset X$ est dit *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Définition 1.1.2. Un ensemble $F \subset X$ est dit *fermé* si son complémentaire ${}^cF = X \setminus F$ est ouvert.

Dans un espace métrique, certaines propriétés topologiques peuvent être caractérisées séquentiellement, i.e., en terme de suite. Il convient donc de rappeler la définition d'une suite convergente.

Définition 1.1.3. Soient (X, d) un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x, x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Le résultat suivant permet de caractériser séquentiellement le fait qu'un ensemble est fermé.

Proposition 1.1.4. *Un sous ensemble F de X est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. $\Longleftarrow$: Il s'agit de montrer que F est fermé, autrement dit que $U := X \setminus F$ est ouvert. Si $U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, soit $x \in U$ et supposons que pour tout $r > 0$, on a $B(x, r) \not\subset U$. En prenant $r = 1/n$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $d(x, x_n) < 1/n$ et $x_n \in X \setminus U = F$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $x_n \to x$ et notre hypothèse montre que $x \in F$ ce qui est absurde. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert et donc que F est fermé.

$\Longrightarrow$: Supposons F fermé de sorte que son complémentaire $U := X \setminus F$ est ouvert. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$. Si $x \in U$, celui-ci étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par définition de la limite, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x) < r$ pour tout $n \geq N$. En particulier $x_N \in B(x, r) \subset U$, ce qui est absurde puisque $x_N \in F$. Par conséquent, $x \in F$. $\square$

Dans ce qui suit, (X_1, d_1) et (X_2, d_2) désignent deux espaces métriques.

Définition 1.1.5. Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X_1$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que

$$d_1(x, y) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad d_2(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On dit que f est continue sur une partie A de X_1 si elle est continue en tout point de A.

Dans un espace métrique, la continuité en un point est équivalente à la continuité séquentielle.

Lemme 1.1.6. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue au point $x \in X$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans X_1, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans X_2.*

Démonstration. Si f est continue en x et $x_n \to x$ dans X_1, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_1(x, x_n) \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $d_2(f(x), f(x_n)) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, si f n'est pas continue en x, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d_1(x, y_\delta) \leq \delta$ et $d_2(f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans X_1 et $d_2(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$, ce qui montre que $f(x_n) \not\to f(x)$. $\square$

De même, dans les espaces métriques, on retrouve la caractérisation des fonctions continues pour les espaces topologiques.

Proposition 1.1.7. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de X_2 est un ouvert de X_1 (resp. l'image réciproque de tout fermé de X_2 est un fermé de X_1).*

Démonstration. On démontre seulement la première assertion, la seconde suit par passage au complémentaire.

Soit f continue et U_2 un ouvert de X_2, on pose $U_1 := f^{-1}(U_2)$. Si $U_1 = \emptyset$, il n'y a rien à montrer. Sinon on considère un élément $x \in U_1$. Alors $f(x) \in U_2$ qui est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$. Par continuité de f en x, il existe un $\delta > 0$ tel que $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon) \subset U_2$, soit $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2) = U_1$ ce qui prouve que U_1 est ouvert dans X_1.

Réciproquement, soient $x \in X_1$ et $\varepsilon > 0$. L'ensemble $U_2 = B_2(f(x), \varepsilon)$ est ouvert dans X_2, donc $f^{-1}(U_2)$ est ouvert dans X_1 et $x \in f^{-1}(U_2)$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que $B_1(x, \delta) \subset f^{-1}(U_2)$, soit $f(B_1(x, \delta)) \subset B_2(f(x), \varepsilon))$ ce qui montre que f est continue en x. □

1.2 Compacité dans un espace métrique

Nous introduisons ci-dessous deux notions, l'une topologique, l'autre séquentiellement, de compacité.

Définition 1.2.1 (Propriété de Borel-Lebesgue). Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i \in I}$, i.e.

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i,$$

on peut extraire un sous recouvrement fini : il existe $i_1, \ldots, i_m \in I$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}.$$

Définition 1.2.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique (X, d) est dit *séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Il s'avère que ces deux notions coïncident dans les espaces métriques.

Théorème 1.2.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.*

Démonstration. **Etape 1 : compact $\Longrightarrow$ séquentiellement compact.** Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de X. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors on peut clairement extraire une sous-suite convergente. Dans le cas contraire, supposons, par l'absurde qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence. Alors pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors un recouvrement ouvert

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, r_x)$$

du compact X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r_{x_k}).$$

Comme chaque boule ne contient qu'un nombre fini d'élements de la suite, alors X également ce qui est absurde.

Etape 2 : séquentiellement compact $\Longrightarrow$ compact. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Montrons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i(x)}$. Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction strictement croissante, qui converge vers un $x \in X$. Par conséquent, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Or pour n assez grand on a que $B(x_{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}) \subset B(x, r) \subset U_i$ ce qui est impossible.

Montrons à présent que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ρ. Dans le cas contraire, pour tout $x_0 \in X$, la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas X. Il existe donc un $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \rho$. Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $x_1, \dots, x_n \in X$ tels que $x_i \notin B(x_j, \rho)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$. Comme $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \rho)$ ne recouvre pas X, on peut trouver un $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \rho)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui satisfait $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \neq m$, et qui ne possède donc aucune sous-suite convergente ce qui est absurde.

On a donc montré l'existence de $x_1, \dots, x_m \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_i, \rho)$$

et donc *a fortiori* un sous-recouvrement fini issu de $\{U_i\}_{i\in I}$ puisque, pour $k = 1, \dots, m$ on a $B(x_k, \rho) \subset U_{i(x_k)}$. □

Corollaire 1.2.4. *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers x. Comme X est séquentiellement compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un $\bar{x} \in X$. Par unicité de la limite, on en déduit que $x = \bar{x} \in X$ ce qui montre que X est fermé.

Si X n'est pas borné, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $d(x_n, x_0) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il n'existe pas de sous-suite convergente. □

Noter que la réciproque est fausse en général comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 1.2.5. On se place dans l'espace métrique $(\mathcal{C}([-1,1]),d)$ où

$$d(f,g) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)-g(x)|$$

est la distance uniforme entre f et $g \in \mathcal{C}([-1,1])$. Soit

$$f_n : x \in [-1,1] \mapsto f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{C}([-1,1])$ qui est bornée puisque $d(f_n,0) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Si une sous suite $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{C}([-1,1])$ vers une fonction f, alors on a nécessairement que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ avec

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la boule unité fermée de $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas (séquentiellement) compacte.

Nous verrons toutefois à la section suivante que les parties fermées bornées décrivent tous les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

La propreté suivante exprime le fait que les ensembles compacts sont stables par image continue.

Proposition 1.2.6. *Soient (X_1,d_1), (X_2,d_2) deux espaces métriques et $f : (X_1,d_1) \to (X_2,d_2)$ une fonction continue. Si $K \subset X_1$ est compact dans X_1 alors $f(K)$ est compact dans X_2.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K tels que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in K$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$. Par continuité de f, il vient $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \to f(x) \in f(K)$ ce qui montre effectivement que $f(K)$ est compact. □

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut exprimer la Proposition 1.2.6 de la façon suivante.

Proposition 1.2.7. *Si (X,d) est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f atteind ses bornes.*

Démonstration. Montrons que f atteint son supremum sur X. Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $f(x_n) \to$

$\sup_X f$. L'espace métrique X étant compact, il existe une sous-suite notée $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$ dans X et, par continuité de f, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Par conséquent

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup_X f.$$

On procède de même pour l'infimum. □

Une autre notion topologique importante est la notion de séparabilité que nous introduisons maintenant.

Définition 1.2.8. Un espace métrique (X, d) est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Les espaces métriques compacts représentent un exemple important d'espace séparable.

Proposition 1.2.9. *Si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est séparable.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, 1/k).$$

Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe donc des points $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{k} B(x_{n_j}^k, 1/k).$$

L'ensemble

$$D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{x_j^k\}$$

est dénombrable et dense dans X. □

1.3 Compacité dans un espace vectoriel normé

On rappelle qu'un *espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel E muni d'une *norme* qui est une application $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty[$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

i) *Séparation* : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in E$;
iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout x, $y \in E$.

Un exemple typique est l'espace $\mathbb{R}^d$ muni de la norme "produit"

$$\|x\|_\infty := \max_{1\leq i\leq d} |x_i| \quad \text{pour tout } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Le résultat fondamental suivant permet de caractériser toutes les parties compactes de $\mathbb{R}^d$.

Théorème 1.3.1 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. **Etape 1 : Le cas $d = 1$.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$y_k := \sup_{n\geq k} x_n \in [-M, M]$$

de sorte que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant décroissante et minorée par $-M$, converge vers une limite notée ℓ.

Soit $k(1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|y_{k(1)} - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Par définition du sup, il existe un entier $\sigma(1) \geq k(1)$ tel que

$$x_{\sigma(1)} \leq y_{k(1)} \leq x_{\sigma(1)} + \frac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$|x_{\sigma(1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(1)} - y_{k(1)}| + |y_{k(1)} - \ell| \leq 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe des entiers $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ tels que

$$|x_{\sigma(k)} - \ell| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq p.$$

Comme $y_k \to \ell$, il existe $k(p+1) \geq \sigma(p) + 1$ tel que

$$|y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{2(p+1)}.$$

Par ailleurs, par définition du sup, il existe un entier $\sigma(p+1) \geq k(p+1)$ tel que

$$x_{\sigma(p+1)} \leq y_{k(p+1)} \leq x_{\sigma(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

ce qui montre que

$$|x_{\sigma(p+1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(p+1)} - y_{k(p+1)}| + |y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{p+1}.$$

On a donc montré par récurrence l'existence d'une extraction $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$|x_{\sigma(p)} - \ell| \leq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N},$$

ce qui donne, par passage à la limite, que $x_{\sigma(p)} \to \ell$.

Etape 2 : Le cas $d \geq 2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, il existe un $M > 0$ tel que $\|x_n\|_\infty \leq M$. En particulier, comme $|(x_n)_i| \leq \|x_n\|_\infty$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on en déduit que chacune des suites numériques $((x_n)_i)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. Par conséquent elles admettent chacune une sous-suite convergente. Plus précisément :

— pour $i = 1$, il existe une extraction $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_1 \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1(n)})_1 \to a_1;$$
— pour $i = 2$, la suite $((x_{\sigma_1(n)})_2)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1\circ\sigma_2(n))})_2 \to a_2;$$
— ...

— On suppose qu'il existe des extractions $\sigma_1, \dots, \sigma_{d-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \le i \le d-1$ on a
$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i \to a_i.$$
La suite $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{d-1}(n)})_d)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et $a_d \in \mathbb{R}$ tels que
$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_d(n)})_d \to a_d.$$

Posons $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. De plus, pour tout $1 \le i \le d$, la suite $((x_{\sigma(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cette dernière converge vers a_i dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $(x_{\sigma(n)})_i \to a_i$ dans $\mathbb{R}$ et donc $x_{\sigma(n)} \to a$ dans $\mathbb{R}^d$. □

Corollaire 1.3.2. *Les parties compactes de* $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ *sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.2.4, toute partie compacte de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ est fermée et bornée dans cet espace. Réciproquement si K est fermé et borné dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un certain $x \in \mathbb{R}^d$. Comme K est fermé, la Proposition 1.1.4 montre que $x \in K$, et donc K est compact. □

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons un espace vectoriel E de dimension finie égale à $d \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ désigne une base de E, alors tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme
$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$
On définit la quantité
$$\|x\|_* := \max_{1\le i\le d} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in E, \tag{1.3.1}$$
et on montre aisément qu'il s'agit effectivement d'une norme sur E.

On considère l'application
$$\begin{array}{rcl} \Phi : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_d). \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que Φ est une application linéaire bijective et que $\|\Phi(x)\|_\infty = \|x\|_*$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme isométrique de $(E, \|\cdot\|_*)$ sur $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$.

La caractérisation des parties compactes de $\mathbb{R}^d$ obtenue au Corollaire 1.3.2 s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie. Pour ce faire, il convient de remarquer que le choix de la norme n'influe pas sur la topologie et donc sur la description des compacts.

Théorème 1.3.3. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie d et N une norme sur E. Nous allons montrer que les normes N et $\|\cdot\|_*$ sont équivalentes.

Etape 1 : Montrons que l'application

$$\begin{array}{rcl} N : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tout x et $y \in E$, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de N, on a

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) = N\left(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)e_i\right) \\ \leq \sum_{i=1}^d N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| N(e_i) \leq L\|x-y\|_*, \end{aligned}$$

où l'on a noté $L := \sum_{i=1}^d N(e_i)$.

Etape 2 : Montrons que l'ensemble $S := \{x \in E : \|x\|_* = 1\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Le Corollaire 1.3.2 montre que l'ensemble

$$\tilde{S} := \left\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : \ \|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty = 1\right\}$$

est un compact de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ car il est fermé (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $(x_1, \ldots, x_d) \mapsto \|(x_1, \ldots, x_d)\|_\infty$) et borné. Grâce à la continuité de Φ^{-1}, la Proposition 1.2.6 montre que $S = \Phi^{-1}(\tilde{S})$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$.

Etape 3 : Comme N est continue sur E, elle l'est en particulier sur le compact S. La Proposition 1.2.7 montre alors l'existence d'un minimum $a \in S$ et d'un maximum $b \in S$ tels que

$$\|a\|_* = \|b\|_* = 1, \quad N(a) \leq N(x) \leq N(b) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Notons $m = N(a)$ et $M = N(b)$. Comme $\|a\|_* = 1$, on en déduit que $a \neq 0$ et donc que $N(a) > 0$. Par conséquent, $m > 0$, $M > 0$ et pour tout $y \in E$ ($y \neq 0$), on a $y/\|y\|_* \in S$, ce qui implique

$$m \leq N\left(\frac{y}{\|y\|_*}\right) \leq M.$$

Par la propriété d'homogénéité de la norme N, on en déduit que

$$m\|y\|_* \leq N(y) \leq M\|y\|_* \quad \text{pour tout } y \neq 0. \tag{1.3.2}$$

Cette inégalité reste bien évidemment vraie si $y = 0$, ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_*$ et N sont équivalentes.

Enfin si N_1 et N_2 sont deux normes quelconques sur E, en combinant les inégalités (1.3.2) appliquées à N_1 et N_2, on en déduit que N_1 et N_2 sont effectivement équivalentes. □

En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 1.3.4. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie d et $K \subset E$ un ensemble fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|)$. D'après le Théorème 1.3.3, K est également fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Par continuité de Φ^{-1}, l'ensemble $\Phi(K) = (\Phi^{-1})^{-1}(K)$ est fermé dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. Comme Φ est une isométrie $\Phi(K)$ est également borné dans $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$. L'ensemble $\Phi(K)$ est donc un compact de $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty)$ en vertu du Corollaire 1.3.2. La continuité de Φ^{-1} et la Proposition 1.2.6 montrent alors que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$ puis également de $(E, \|\cdot\|)$ par une nouvelle application du Théorème 1.3.3. Réciproquement, d'après le Corollaire 1.2.4, toute partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. □

Cette caractérisation est fausse en dimension infinie, comme l'atteste le résultat suivant.

Théorème 1.3.5 (Riesz). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée est compacte si et seulement E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Comme la boule unité fermée $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est fermée et bornée, elle est compacte en vertu du Théorème 1.3.4.

Réciproquement, notons $B := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E que nous supposons compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon). \tag{1.3.3}$$

Soit $F = \text{Vect}\{x_i\}_{1\leq i\leq N}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $F = E$, alors le résultat suit. Dans le cas contraire, on peut trouver un $x \in E \setminus F$. Notons $d = \text{dist}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Comme F est de dimension finie, F est fermé dans E et donc $d > 0$. On peut alors trouver un $y_\varepsilon \in F$ tel que

$$d \leq \|x - y_\varepsilon\| \leq \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Posons $z_\varepsilon = \frac{x-y_\varepsilon}{\|x-y_\varepsilon\|} \in B$. Alors pour tout $y \in F$,

$$\|z_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\|y\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \geq d\frac{1-\varepsilon}{d} = 1 - \varepsilon$$

car $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y \in F$, ce qui montre que

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après (1.3.3), il existe un $i \in \{1, \ldots, N\}$ tel que $z_\varepsilon \in B(x_i, \varepsilon)$ et donc, puisque $x_i \in F$,

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \leq \|z_\varepsilon - x_i\| < \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction en choisissant $\varepsilon \leq 1/2$. □

Remarque 1.3.6. Cette propriété est propre aux espaces vectoriels normés. Il existe en particulier des espaces métriques de "dimension infinie" pour lesquels les parties fermées et bornées sont compactes. C'est notamment le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, ainsi que de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (pour lesquels il convient de définir une distance).

La topologie dite "forte" de la norme d'un espace vectoriel normé de dimension infinie contient donc trop d'ouverts pour permettre aux parties fermées et bornées d'être compactes. L'un des objets de ce cours sera d'une part de montrer des critères de compacité dans des espaces fonctionnels particuliers (espace de fonctions continues, espaces de Lebesgue) qui requièrent plus d'hypothèses que seulement d'être bornés, et d'autre part de définir une topologie dite "faible" en retirant des ouverts de la topologie forte, ce qui par là même augmentera le nombre de compacts.