Université Pierre et Marie Curie – Paris 6
Licence de Mathématiques
3M234

Feuille de T.D. n°1
Année universitaire 2016-2017
Approximation numérique des fonctions

Approximation de solutions d'équations

Exercice 1 (Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 1)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$, c'est-à-dire, il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 2 (Théorème des valeurs intermédiaires par une méthode de dichotomie)
On se propose de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires à l'aide d'une méthode de dichotomie. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Ensuite, si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, on pose

$$a_{n+1} := a_n, \qquad b_{n+1} := c_n,$$

et sinon

$$a_{n+1} := c_n, \qquad b_{n+1} := b_n.$$

1. Montrer que (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
2. Montrer que $f(\ell) = 0$.

Exercice 3 On considère l'équation $\sin x - x + 2 = 0$, pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Trouver un intervalle I de longueur 2 qui contient l'ensemble des solutions.
2. Montrer que, dans cet intervalle I, l'équation considérée admet une unique solution, notée $\bar{x}$, et que la suite (x_n) définie par la donnée de $x_0 \in I$ et la relation $x_{n+1} = 2 + \sin x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers $\bar{x}$.

Exercice 4 Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

1. Peut-on appliquer le théorème du point fixe <u>de Picard</u> à la fonction f de l'énoncé ?
2. Soit $c \in [a, b]$. On considère la suite de fonction $f_n(x) = \frac{1}{n}c + (1 - \frac{1}{n})f(x)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f_n admet un point fixe sur $[a, b]$ que l'on notera x_n.
3. Montrer qu'on peut extraire de la suite (x_n) une sous-suite convergeant vers un point fixe de f.
4. En déduire que f admet un point fixe. Montrer par un contre-exemple simple que le point fixe peut ne pas être unique ?

Exercice 5 On considère une méthode itérative pour l'approximation d'une solution d'équation non linéaire. On suppose avoir construit une suite (x_n) approximant la solution $\bar{x}$ du problème et on note $\varepsilon_n := x_n - \bar{x}$ l'erreur à l'étape n. On dit que la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$ avec un ordre $p \geq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq C|\varepsilon_n|^p.$$

Si $p = 1$, la convergence est linéaire, si $p = 2$, elle est quadratique, *etc*. Plus l'ordre de la méthode est élevé, plus celle-ci converge rapidement vers la solution de l'équation.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction contractante. Montrer qu'elle admet un unique point fixe $\bar{x}$. On pourra considérer comme en cours la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrer qu'elle est de Cauchy.

2. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et qu'elle satisfait $f^{(i)}(\bar{x}) = 0$ pour $1 \leq i \leq p$, et $f^{(p+1)}(\bar{x}) \neq 0$. Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p+1$.

Exercice 6 (Calcul approché de π)
On cherche une approximation de π comme zéro de la fonction $f : x \mapsto \cos(x/2)$. Écrire l'algorithme de Newton correspondant. Quel est son ordre ?

Exercice 7 (Calcul approché d'une racine carrée)
On se propose d'utiliser la méthode de Newton pour calculer la valeur approchée de la racine carrée d'un nombre réel.

1. Soit $a > 0$, déterminer une fonction f telle que $f(\sqrt{a}) = 0$. La fonction f doit être entièrement déterminée à partir du nombre a puisque c'est la seule donnée connue au départ du processus. Soit $x_0 > 0$, montrer que l'application de la méthode de Newton permet de construire la suite
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$
Montrer que la suite est bien définie : $x_n > 0$ pour tout n entier.
2. Montrer que l'on a
$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2.$$
En déduire que $x_n > \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$ (si $x_0 \neq \sqrt{a}$).
3. On suppose $x_0 \neq \sqrt{a}$. Montrer que l'on a alors $x_{n+1} < x_n$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite x_∞. Montrer que $x_\infty = \sqrt{a}$.
4. Dans le cas $a = 2$ et $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3. Comparer ces premiers itérés avec ceux obtenus par dichotomie. On partira par exemple de l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$.

Exercice 8 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle fermé I. On suppose que f admet un unique zéro a sur I. Pour $\alpha > 0$, on introduit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - \alpha f(x)$.

1. Montrer que g possède un unique point fixe.
2. Si, pour tout $x \in I$, on a $0 < m \leq f'(x) \leq M$, dans quel intervalle peut-on choisir α pour que g soit contractante sur I ? Quelle valeur de α faut-il choisir pour que $\sup\limits_I |g'|$ soit le plus petit possible ?
3. Construire une méthode itérative de type point fixe pour approcher la valeur de $\sqrt{a}$ avec $a > 1$. On pourra prendre $f(x) = x^2 - a$ et $I = [1, a]$.

Exercice 9 (Méthodes de Newton et Steffensen)
Soit (x_n) une suite itérée associée à une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I)$, où I est un intervalle fermé voisinage de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. On suppose ici que $f'(a) \neq 0$.

1. Montrer que l'ordre de convergence de la méthode de Newton
$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$
est $p = 2$ (convergence quadratique).
2. Montrer que la méthode de Steffensen
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)},$$
a également pour ordre de convergence $p = 2$. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de Newton ?