

**Exercice 1.1.** Soit  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . On pose, pour  $p \in ]1, +\infty[$ ,

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1. Démontrer que  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^n$ .

2. Démontrer que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Discuter le cas  $n = 1$ .

3. Représenter dans  $\mathbb{R}^2$  la boule unité fermée  $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_p \leq 1\}$  pour  $p = 1, 2$  et  $\infty$ .

4. L'objectif de cette question est de prouver que  $\|\cdot\|_p$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ .

(a) Montrer que, pour tout  $s, t \geq 0$ ,  $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ , où  $q$  est donné par  $1/q = 1 - 1/p$ . *Indication* : on pourra fixer  $t$  et étudier la fonction  $s \mapsto st - \frac{s^p}{p} - \frac{t^q}{q}$ .

(b) Pour  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , on pose  $\alpha = \|x\|_p$  et  $\beta = \|y\|_q$ . Montrer, pour tout  $i$ , que

$$\frac{|x_i y_i|}{\alpha \beta} \leq \frac{|x_i|^p}{p \alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q \beta^q},$$

et en déduire  $\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ . (En utilisant l'inégalité triangulaire à gauche, on obtient la fameuse inégalité de Hölder :  $|x \cdot y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ , qui généralise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

(c) En remarquant que  $|x_i + y_i|^p \leq |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|$ , montrer que  $\|\cdot\|_p$  vérifie l'inégalité triangulaire, puis conclure.

*N.B.* Dans la suite, la norme euclidienne  $\|\cdot\|_2$  sera le plus souvent notée  $\|\cdot\|$ .

### Indications.

1. Pour l'inégalité triangulaire pour  $\|\cdot\|_2$ , utiliser le produit scalaire sous-jacent ( $\|x\|_2^2 = x \cdot x$ ) pour montrer avec l'identité remarquable  $\|x+y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2x \cdot y + \|y\|_2^2$  qu'elle est impliquée par l'inégalité de Cauchy-Schwarz  $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$  (les deux inégalités sont en fait strictement équivalentes mais ici on n'a pas besoin de la réciproque) puis redémontrer celle-ci directement en étudiant le polynôme  $P(t) = \|tx + y\|_2^2$  (qu'on développera en utilisant de nouveau l'identité remarquable).

2. Se rappeler que, dans le développement de  $\|x\|_2^2$ , les doubles produits sont tous positifs.

3. Au vu des inégalités de la question précédente, en notant  $B_p$  la boule unité pour la norme  $p$ , on doit avoir  $B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$ .

4. (a) Étude de fonction classique.

(b) Prendre des valeurs bien choisies pour  $s$  et  $t$ . Pour la seconde inégalité, sommer sur  $i$ . La somme de droite a une valeur toute particulière.

(c) Appliquer l'inégalité de Hölder sur chaque somme du terme de droite en posant d'abord  $X = (|x_i|)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $Y = (|x_i + y_i|^{p-1})_{1 \leq i \leq n}$ , puis  $X = (|y_i|)_{1 \leq i \leq n}$  et le même  $Y$ , puis utiliser les relations entre  $p$  et  $q$ . (Attention, l'inégalité triangulaire ne suffit pas pour faire de  $\|\cdot\|_p$  une norme.)

**Exercice 1.2.** 1. (*Cours*) Montrer que toute réunion et toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. Reprendre la question lorsque les réunions et intersections sont infinies. En déduire les propriétés correspondantes pour les fermés.

2. Montrer que tout singleton est fermé. Proposer un exemple de réunion dénombrable (c'est-à-dire indexée sur l'ensemble  $\mathbb{N}$ ) de singletons qui ne soit pas fermée. Vérifier également que la réunion non-dénombrable  $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{\exp(x)\}$  n'est pas fermée.

3. (*Cours*) Montrer que la boule ouverte unité est ouverte et que la boule fermée unité est fermée.
4. (*Cours*) Montrer que l'ensemble vide et  $\mathbb{R}^n$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont à la fois ouverts et fermés.
5. Proposer un exemple d'ensemble ni ouvert ni fermé.
6. Montrer que le produit cartésien  $E \times F \subset \mathbb{R}^{n+m}$  est ouvert si  $E \subset \mathbb{R}^n$  et  $F \subset \mathbb{R}^m$  sont ouverts, fermé si  $E$  et  $F$  sont fermés. Que peut-on dire si  $E$  est ouvert non-fermé et  $F$  est fermé non-ouvert ?
7. Vérifier que l'ensemble  $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$  est fermé. Que peut-on dire des projections de cet ensemble (c'est-à-dire  $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \ (x, y) \in G\}$  et  $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} \ (x, y) \in G\}$ ) ?

**Indications.** Les résultats de cours doivent être démontrables sans indications !

*Remarque : les indications ci-dessous partent du principe que le résultat selon lequel « l'image réciproque d'un fermé, respectivement d'un ouvert, par une application continue est un fermé, respectivement un ouvert » n'a pas encore été vu en cours. Si tel est cependant le cas, certaines questions peuvent être traitées bien plus efficacement, mais il peut être formateur de les traiter tout de même via les définitions d'ouvert et de fermé sans utiliser le résultat susmentionné.*

1. Cours. Pour les réunions et intersections infinies, toujours avoir en tête les contre-exemples que sont l'intersection de tous les intervalles ouverts  $]-\frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et la réunion de tous les intervalles fermés  $[\frac{1}{n}, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
2. Que peut-on dire d'une suite convergente à valeurs dans un singleton ? Pour le contre-exemple dénombrable : une famille indexée sur  $\mathbb{N}$ , c'est une suite. Le contre-exemple le plus simple serait donc celui d'une suite dont au moins une sous-suite convergente<sup>1</sup> ne converge pas vers une valeur de la suite de départ. On peut même être encore plus grossier : la sous-suite pourrait être la suite elle-même ! Enfin, pour la réunion dénombrable, il suffit de réécrire la réunion sous une forme plus habituelle.
3. Cours.
4. Cours.
5. Les possibilités sont infinies. Moralement, il faut utiliser le fait qu'un fermé est « un ensemble contenant toute sa frontière » et qu'un ouvert est « un ensemble n'intersectant pas sa frontière ». Entre ces deux définitions se trouvent tous les ensembles contenant certains points de leur frontière mais pas tous.
6. Le cas  $E$  et  $F$  fermé est très simple et le cas ouvert peut s'en déduire par passage au complémentaire. Cela dit il peut être formateur de traiter le cas ouvert directement avec la définition utilisant les boules ouvertes. Pour le cas  $E$  ouvert non-fermé et  $F$  fermé non-ouvert, considérer les points  $(x_n, y) \in E \times F$  avec  $y$  fixé quelconque et  $(x_n)$  une suite convergente à valeurs dans  $E$  dont la limite ne soit pas dans  $E$ . Puis, symétriquement, considérer le point  $(x, y^*)$  avec  $y^*$  contredisant le fait que  $F$  soit ouvert (pour conclure sur ce point, il pourra être utile d'utiliser l'équivalence des normes pour passer par la norme  $\|\bullet\|_\infty$ , dont les boules sont des pavés).
7. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés pour montrer que le graphe  $G$  est fermé. Déterminer les projections de  $G$  n'est ensuite pas difficile et on peut aisément conclure à leur sujet (par exemple, en utilisant le fait que tout singleton est fermé).

Au sujet des deux dernières questions : il peut être démontré que l'image réciproque d'un ouvert, respectivement d'un fermé, par une projection est un ouvert, respectivement un fermé (c'est une conséquence directe du fait que les projections sont des applications continues, cf. le résultat de cours mentionné dans la remarque ci-dessus). Remarquez que connaître ce résultat permet de montrer directement que le produit cartésien fini d'ouverts, respectivement de fermés, est ouvert, respectivement fermé. Par ailleurs, les projections sont des « applications ouvertes », c'est-à-dire que la projection d'un ouvert est un ouvert. La dernière question fournit donc un contre-exemple à l'énoncé « la projection d'un fermé est un fermé ».

---

1. Insistons cependant sur le fait qu'une suite  $(v_n)$  à valeurs dans le support d'une autre suite  $(u_n)$  n'est pas nécessairement une sous-suite de  $(u_n)$ . Par contre la réciproque est vraie, et c'est ce qu'on utilise là : une sous-suite de  $(u_n)$  est bien une suite à valeurs dans le support de  $(u_n)$ .

**Exercice 1.3.** Représenter graphiquement (si possible) les ensembles suivants et déterminer s'ils sont ouverts, fermés ou ni l'un ni l'autre.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\}; \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\};$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 1\}; \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\};$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}; \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x > 0\}.$$

**Indications.** Les représentations graphiques peuvent donner une intuition très forte de la réponse. Cependant il faut ensuite confirmer cette réponse par une preuve! Nier qu'un ensemble est ouvert (ou fermé), c'est trouver un contre-exemple à la définition (on verra plus tard, par ailleurs, que les seuls ensembles simultanément ouverts et fermés de  $\mathbb{R}^n$  sont  $\mathbb{R}^n$  lui-même et l'ensemble vide).

$A$  est représentable graphiquement et peut d'ailleurs s'écrire comme  $]0, 1[ \cup ]1, 2[ \times \mathbb{R}$ .

$B$  est représentable graphiquement et s'écrit d'ailleurs  $]0, 1] \times \mathbb{R}$ .

$C$  est représentable graphiquement et s'écrit d'ailleurs  $] - 1, 1[ \times ] - 1, 1[$ .

$D$  et  $E$  ne sont pas représentables graphiquement. Mais un ensemble d'intérieur vide (c'est-à-dire le complémentaire d'un ensemble dense) peut-il être ouvert? Et un ensemble dense peut-il être fermé? Et  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  ne sont-ils pas, l'un et l'autre, denses et d'intérieur vide?

$F$  est représentable graphiquement et s'écrit comme une intersection de deux ouverts.

**Exercice 1.4.** 1. Déterminer les égalités entre l'intérieur/l'adhérence d'une partie  $E \subset \mathbb{R}^n$  et l'adhérence/l'intérieur de son complémentaire.

2. Soit  $(E_i)_{i \in I}$  une famille quelconque d'ensembles,  $F = \bigcap_{i \in I} E_i$ ,  $G = \bigcup_{i \in I} E_i$ . Déterminer l'inclusion entre  $\bar{F}$  et  $(\bar{E}_i)_{i \in I}$  puis celle entre  $\bar{G}$  et  $(\bar{E}_i)_{i \in I}$ . Déterminer de même l'inclusion entre  $\text{Int}(F)$  et  $(\text{Int}(E_i))_{i \in I}$  puis celle entre  $\text{Int}(G)$  et  $(\text{Int}(E_i))_{i \in I}$ . Que dire de plus si l'ensemble d'indices  $I$  est fini? Trouver un contre-exemple avec un ensemble  $I$  infini.

3. On définit un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^2$  en posant

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de  $A$ .

**Indications.** Comme bien souvent en mathématiques, faire un dessin permet de deviner les réponses et doit impérativement être la première étape lors de la résolution de l'exercice!

Rappelons que par optimalité (au sens de l'inclusion) de l'intérieur et de l'adhérence, il y a dans chaque cas une inclusion qui est toujours facilement démontrée (par ex., un fermé contenant  $E$  contient toujours  $\bar{E}$ ). C'est l'égalité ensembliste (autrement dit, l'inclusion réciproque) qui est plus difficile à démontrer. Pour ce faire, on supposera par l'absurde que le candidat n'est pas optimal et on étudiera les éléments  $x$  ainsi obtenus.

Pour la dernière question, on utilisera d'abord le fait que, pour deux ensembles quelconques de  $\mathbb{R}^2$   $E$  et  $F$ ,  $E \setminus F = E \cap (\mathbb{R}^2 \setminus F)$ . On remarquera aussi que déterminer l'intérieur et l'adhérence permet d'obtenir directement la frontière par l'égalité  $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int}(A)$ .

**Exercice 1.5.** Montrer que le support d'une suite convergente de  $\mathbb{R}^n$  et sa limite forment un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$ .

**Indications.** Pour montrer que cet ensemble est fermé, se donner une suite convergente à valeurs dans cet ensemble. Écarter le cas trivial d'une suite stationnaire. Montrer alors que, dans tout voisinage de la limite de cette suite, il existe une infinité (dénombrable) de points distincts de l'ensemble. Réordonner cette infinité dénombrable pour en faire une sous-suite extraite de la suite de départ et obtenir ainsi la valeur de la limite de la suite qu'on s'est donné initialement.

---

**Exercice 1.6.** Montrer que les ensembles suivants ne sont pas connexes :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, |y| \leq 1\}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}.$$

**Indications.** Pour  $A$ , faire un dessin puis vérifier que  $A$  s'écrit exactement comme la réunion disjointe de deux ouverts, ce qui permet de conclure par la définition d'ensemble connexe.

Pour  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Q}$ , on peut utiliser l'équivalence entre connexité et convexité en dimension 1.

Pour  $\mathbb{Z}$ , enfin, on peut aussi considérer la fonction de  $\mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$  qui a un entier relatif associé 1 s'il est positif, 0 s'il est strictement négatif, et utiliser une définition équivalente de la connexité.

---

**Exercice 1.7.** Soient  $C_1$  et  $C_2$  deux parties ouvertes connexes de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ . Montrer que  $C_1 \cup C_2$  est connexe. Étudier la réciproque.

**Indications.** Se donner deux points  $x$  et  $y$  de  $C_1 \cup C_2$  et construire directement la ligne brisée les joignant.

---

**Exercice 1.8.** Un ensemble  $C \subset \mathbb{R}^n$  est dit connexe par arcs si pour tous  $a, b \in C$ , il existe une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $\gamma([0, 1]) \subset C$ ,  $\gamma(0) = a$  et  $\gamma(1) = b$ .

1. Montrer :  $C$  convexe  $\implies C$  connexe par arcs  $\implies C$  connexe. On supposera  $C$  ouvert pour simplifier.
2. Montrer par un exemple qu'un ensemble connexe par arcs n'est pas nécessairement convexe.

*Remarque : on signale au passage qu'il existe des ensembles<sup>1</sup> connexes mais non connexes par arc. Les deux notions ne sont donc pas équivalentes !*

**Indications.**

1. La première implication est aisée, même dans le cas où  $C$  n'est pas ouvert.

Pour la seconde implication, on peut, par exemple, procéder par l'absurde : on se donne un ouvert  $C$  non-connexe et connexe par arcs. Il existe deux points  $x$  et  $y$  de  $C$  tels que toute ligne brisée les joignant ne soit pas contenue dans  $C$ . Mais par connexité par arcs, il existe aussi un chemin continu  $\gamma([0, 1]) \subset C$  les joignant. On construit ensuite une suite de subdivisions de ce chemin de plus en plus fines. Cela induit une suite de lignes brisées qui converge uniformément vers le chemin  $\gamma([0, 1])$ .

À chaque raffinement de la subdivision, on associe un point de la ligne brisée correspondante qui ne soit pas dans  $C$ . Cela donne une suite de points dans le fermé  $\mathbb{R}^n \setminus C$ . Par convergence uniforme des lignes brisées, l'adhérence de la réunion des lignes brisées est un ensemble fermé et borné, donc compact. Donc à extraction d'une sous-suite près on peut supposer que la suite de points dans  $\mathbb{R}^n \setminus C$  qu'on a construit converge, et sa limite est donc elle-même dans  $\mathbb{R}^n \setminus C$ .

On vérifie ensuite que cette limite est bien un point de  $\gamma([0, 1])$ , ce qui donne une contradiction.

2. Faire un dessin !

*Remarque : il y a énormément de remarques à faire sur l'implication connexité par arcs implique connexité (question classique sur la connexité).*

*D'abord, pour les ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , c'est en fait une équivalence ! Pour les ensembles non-ouverts, elle reste vraie mais la réciproque ne tient plus.*

---

1. Plus ou moins monstrueux.

La preuve ci-dessus repose réellement sur l'hypothèse simplificatrice  $C$  ouvert. Il existe (évidemment) des preuves du résultat dans le cas général. Ces preuves ne sont pas forcément plus difficiles mais utilisent souvent un résultat plus avancé sur la connexité qui n'est pas dans votre cours : les ensembles connexes sont exactement les ensembles tels que toute fonction continue de  $\{0, 1\}$  dans l'ensemble en question soit constante.

---

**Exercice 1.9.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$  et  $K = \overline{B}(0, 1)$  sa boule unité fermée.

1. Montrer que  $K$  est non-vide, convexe, compacte et invariante par la symétrie centrale  $x \mapsto -x$ .
2. Trouver  $n$  autres invariances, deux à deux distinctes, dans le cas particulier d'une norme  $\|\cdot\|_p$ ,  $p \geq 1$ .

**Indications.**

1. La norme étant quelconque, on n'a de toute façon que 3 outils possibles : les trois propriétés de la définition de la norme.
2. Se référer au dessin des boules unités dans  $\mathbb{R}^2$  si nécessaire.

**Exercice 2.1.** Déterminer et représenter l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x+y+1) ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{x^2 - y^2} ;$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} ; \quad f_5 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\cos(x-y)} ; \quad f_6 : (x, y, z) \mapsto \tan(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

**Indications.** Faire attention au sens à donner à  $f_4(x, y)$ .

**Exercice 2.2.** Les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^2$  suivants sont-ils ouverts? fermés? compacts?

1.  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - \sin(y) \leq 4\}$
2.  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 - 4e^y > 4\}$
3.  $C = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : \cos(x) \geq 0\}$

**Indications.** Pour montrer qu'un fermé est compact, il faut montrer qu'il est borné; étudier la bornitude des ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne devrait pas être un problème.

Pour ce qui est de fermé/ouvert, traitons un quatrième exemple pour donner un modèle de rédaction.

Montrons que l'ensemble des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est un ouvert<sup>1</sup>.

Pour commencer, soit  $f : \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application qui, à un vecteur  $v = (v_k)_{1 \leq k \leq n}$  de  $\mathbb{R}^{n^2}$  associe le déterminant de la matrice  $V = (V_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  avec  $V_{i,j} = v_{(i-1)n+j}$ <sup>2</sup>.

D'après les formules du cours d'algèbre linéaire,  $f$  est une fonction polynomiale en les éléments de  $V$ , c'est-à-dire en les coordonnées de  $v$ , et donc continue.

Ensuite,  $GL_n(\mathbb{R})$  s'écrit comme

$$\{v \in \mathbb{R}^{n^2} \mid f(v) \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}^*).$$

Or  $\mathbb{R}^*$  est un ouvert, donc  $f$  étant continue, l'ensemble des antécédents de  $\mathbb{R}^*$  par  $f$  est un ouvert lui-même.

**Exercice 2.3.** Soit  $K_1$  et  $K_2$  deux compacts de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer qu'il existe  $x \in K_1$  et  $y \in K_2$  tels que  $d(K_1, K_2) = d(x, y)$ , où  $d$  désigne la distance euclidienne.

*Précision : on rappelle que la distance entre deux ensembles  $E$  et  $F$  de  $\mathbb{R}^n$  est définie comme*

$$d(E, F) = \inf\{d(x, y) \mid (x, y) \in E \times F\}.$$

**Indications.** Commencer par vérifier que le produit cartésien  $K_1 \times K_2$  est lui-même compact. On rappelle qu'une fonction continue, définie sur un compact et à valeurs réelles atteint ses bornes (voir cours).

1. C'est un résultat un peu plus amusant quand même!  
 2. Rappelons que la correspondance entre  $V$  et  $v$  est classique et, si nécessaire, bijective et continue (voir l'introduction de n'importe quel cours d'algèbre linéaire).

**Exercice 2.4.** (Cours) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue. Montrer que l'image par  $f$  d'un ensemble compact est compacte.

**Indications.** Vérifier qu'un produit cartésien fini de compacts est un compact et procéder composante par composante en utilisant le résultat de cours pour  $m = 1$ .

Il peut être souhaitable de redémontrer, en guise d'exercice, le résultat de cours susmentionné.

**Exercice 2.5.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue.

1. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
  - (a)  $\forall M > 0, \exists R > 0$  tel que  $|x| > R \implies |f(x)| > M$ .
  - (b) Pour toute partie bornée  $B$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(B)$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}^n$ .
  - (c) Pour toute partie compacte  $K$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(K)$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^n$ .
2. On suppose dans cette question que  $f$  est strictement positive et telle que  $f(x) \rightarrow +\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ . La fonction  $f$  admet-elle un minimum ? Que peut-on en dire ?

**Indications.**

1. On peut montrer que (a) implique (b) en supposant par l'absurde (a) et non (b). (Il peut être commode de passer par la contraposée de (a)). On peut montrer (b) implique (c) très directement. Enfin on peut montrer (c) implique (a) directement (encore une fois avec la contraposée de (a)).
2. Peut-on faire le lien avec la question précédente ? Se demander à quel point l'hypothèse de positivité de  $f$  est nécessaire pour conclure.

**Exercice 2.6.** On munit  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , d'une norme quelconque  $\|\cdot\|$ . Soit  $T$  une application linéaire,  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ .

1. L'application  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|T(x)\|$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^n$  ?
2. La sphère unité  $\mathcal{S} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  est-elle fermée/ouverte dans  $\mathbb{R}^n$  ? Est-elle bornée ?
3. En déduire, en argumentant avec précision, que la quantité  $\|T\| = \max_{\|x\|=1} \|T(x)\|$  est bien définie.
4. Montrer :  $\forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \|T(y)\| \leq \|T\| \|y\|$  (on utilisera la linéarité de  $T$ ).
5. En déduire :  $\sup_{y \neq 0} \frac{\|T(y)\|}{\|y\|} \leq \|T\|$ , puis qu'en fait c'est une égalité (en utilisant la question 3).

**Indications.**

1. Penser composition.
2. On peut soit passer par les définitions d'ouvert et fermé soit par la caractérisation par les fonctions continues. La bornitude est évidente.
3. Penser fonction continue et compact.
4. Comme dans n'importe quel cours d'algèbre linéaire.
5. Pas de difficulté.

**Exercice 2.7.** Étudier l'existence des limites suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x+y} ; & \text{(b)} \quad & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz + z^3}{2x^3 + yz^2} ; & \text{(c)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| + |y|}{x^2 + y^2} ; \\
 \text{(d)} \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{x^2 - y^2} ; & \text{(e)} \quad & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} ; & \text{(f)} \quad & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x + y + z} .
 \end{aligned}$$

**Indications.** Globalement, il y a deux manières de montrer l'existence d'une limite pour des fonctions explicites : en utilisant l'équivalence des normes dans  $\mathbb{R}^n$  ou, dans  $\mathbb{R}^2$  et pour une limite en  $(0, 0)$ , en passant en coordonnées polaires (et il faut bien comprendre que ces deux manières se confondent, du fait du lien entre coordonnées polaires et  $\|\cdot\|_2$ !).

Il n'y a par contre qu'une seule manière de montrer l'inexistence d'une limite : construire deux « chemins »  $(x, y) = (x, f_1(x))$  et  $(x, y) = (x, f_2(x))$  tels que la fonction, évaluée en ces deux chemins, ait deux limites différentes. C'est une contradiction de l'unicité de la limite. Le premier chemin est en général aussi simple que possible (typiquement  $f_1(x) = x$ ). Le second doit être plus astucieux et utiliser la forme particulière de la fonction. Dans  $\mathbb{R}^2$  et pour une limite en  $(0, 0)$ , il est possible de chercher un chemin en coordonnées polaires  $(r, \theta) = (r, f(r))$ .

Les résultats attendus sont les suivants :

- (a) N'existe pas.
- (b) N'existe pas.
- (c) Existe et vaut  $+\infty$ .
- (d) N'existe pas.
- (e) N'existe pas.
- (f) N'existe pas.

**Exercice 2.8.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ . Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$$

et que  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  n'existe pas.

**Indications.** Les deux premières limites (imbrications de limites dans  $\mathbb{R}$ ) se calculent directement.

La limite dans  $\mathbb{R}^2$  n'existe pas à partir du moment où on trouve un « chemin »  $(x, y) = (x, g(x))$  tel que  $f(x, g(x))$  ne tende pas vers 0. Faire simple !

**Exercice 2.9.** Étudier la continuité des fonctions suivantes définies sur  $\mathbb{R}^2$  par

1.  $f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f_1(0, 0) = 0$  ;
2.  $f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f_2(0, 0) = 0$ .

On étudiera également la continuité des applications partielles au point  $(0, 0)$ .

**Indications.**

1. Peut-on utiliser l'équivalence des normes pour en déduire le résultat ? Si non, y a-t-il un « chemin »  $(x, y) = (x, f(x))$  particulier (puisque l'on est dans  $\mathbb{R}^2$  et au voisinage de  $(0, 0)$ , on peut passer par les coordonnées polaires,  $(r, \theta) = (r, f(r))$ ) qui donne une limite différente de  $f_1(0, 0) = 0$  ?
2. Mêmes questions.

Se rappeler du lien entre continuité de la fonction et continuité des fonctions partielles. Se rappeler aussi de la définition des fonctions partielles et donc de ce que signifie leur continuité.

**Exercice 2.10.** Prolonger par continuité en  $(0, 0)$  la fonction  $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ .



**Indications.** Bien lire la question : elle donne d'office la réponse quant à l'existence de la limite. Sachant ceci, il y a deux manières de calculer une limite pour des fonctions explicites : en utilisant l'équivalence des normes dans  $\mathbb{R}^n$  ou, dans  $\mathbb{R}^2$  et pour une limite en  $(0, 0)$ , en passant en coordonnées polaires (et il faut bien comprendre que ces deux manières se confondent, du fait du lien entre coordonnées polaires et  $\|\cdot\|_2$ !).

**Exercice 2.11.** On définit la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$  par

$$f(x, y) = \frac{\sin x - \sin y}{x - y}.$$

Peut-on prolonger  $f$  en une fonction continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

**Indications.** Il y a deux manières qualitativement très différentes de traiter cet exercice.

Pour commencer, s'il y a une limite quand  $(x, y) \rightarrow (x_0, x_0)$ , qu'est-elle ?

Ensuite, pour vérifier rigoureusement cette conjecture, on peut :

1. utiliser les formules de trigonométrie ;
2. observer, plus généralement, qu'il doit y avoir une preuve générale pour des fonctions de ce type où la fonction sin est remplacé par une fonction  $g$  quelconque (satisfaisant tout de même certaines hypothèses à déterminer). Observer ensuite que  $f(x, y)$  ressemble beaucoup à une quantité bien connue du cours d'analyse réelle et retrouver le théorème adéquat.

La seconde preuve est beaucoup plus longue mais présente l'avantage de s'appliquer à une bien plus large classe de fonctions<sup>1</sup>.

**Exercice 3.1.** Calculer les dérivées partielles des applications de l'exercice 2.1, à savoir :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x+y+1) ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(1+x) - \ln(1+y)}{x^2 - y^2} ;$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} ; \quad f_5 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\cos(x-y)} ; \quad f_6 : (x, y, z) \mapsto \tan(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

**Indications.** Les résultats à obtenir sont :

$$\partial_x f_1(x, y) = \left( (y-2) \sqrt{\frac{2x+3}{y-2}} \right)^{-1},$$

$$\partial_y f_1(x, y) = \frac{\sqrt{\frac{2x+3}{y-2}}}{4-2y},$$

$$\partial_x f_2(x, y) = \partial_y f_2(x, y) = \frac{1}{x+y+1},$$

$$\partial_x f_3(x, y) = \frac{\frac{x^2-y^2}{x+1} - 2x(\ln(1+x) - \ln(1+y))}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\partial_y f_3(x, y) = \frac{\frac{y^2-x^2}{y+1} + 2y(\ln(1+x) - \ln(1+y))}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\partial_x f_4(x, y) = -\frac{y}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right),$$

1. Et de ne pas nécessiter une connaissance par cœur du formulaire de trigo...

$$\begin{aligned}\partial_y f_4(x, y) &= \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{y}{x}} \left(\ln\left(\frac{x}{y}\right) - 1\right), \\ \partial_x f_5(x, y) &= \frac{\tan(x-y)}{\cos(x-y)}, \\ \partial_y f_5(x, y) &= \frac{\tan(x-y)}{-\cos(x-y)}, \\ \partial_x f_6(x, y, z) &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2}, \\ \partial_y f_6(x, y, z) &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2}, \\ \partial_z f_6(x, y, z) &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2}.\end{aligned}$$

**Exercice 3.2.** Que peut-on dire du domaine de définition des dérivées partielles des fonctions  $f_1$  et  $f_2$  de l'exercice 2.9, à savoir :

1.  $f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f_1(0, 0) = 0$ ;
2.  $f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  et  $f_2(0, 0) = 0$ ?

Calculer ces dérivées partielles là où elles existent.

Ces fonctions sont-elles différentiables en  $(0, 0)$ ?

**Indications.** Bien se remémorer la définition d'une dérivée partielle en un point. Les dérivées partielles peuvent exister même si la fonction n'est pas continue! Ne pas interpréter l'énoncé trop vite par habitude de l'analyse d'une seule variable et réfléchir avant de se lancer!

En-dehors de  $(0, 0)$ , les dérivées partielles sont clairement définies et leur calcul ne doit pas être un problème. On peut utiliser les propriétés de symétrie de  $f_1$  et  $f_2$  pour aller plus vite.

Si les fonctions sont différentiables, que valent leurs différentielles? Une fois ces candidates établies et nommées, par exemple,  $L_1$  et  $L_2$ , vérifier la différentiabilité, c'est étudier la convergence vers 0 de

$$\frac{f_i(0+h, 0+k) - f_i(0, 0) - L_i(h, k)}{\|(h, k)\|}$$

quand  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Une question à se poser : dans l'expression ci-dessus, de quelle norme s'agit-il?

**Exercice 3.3.** (*Cours*) Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ .

1. Rappeler la définition d'une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a$  (on pourra commencer par le cas  $n = 2$ ).
2. Montrer que si  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
3. Soit  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction différentiable en  $a$ . Expliquer pourquoi les coefficients du développement limité à l'ordre 1 de  $g$  en  $a$  sont les dérivées partielles de  $g$  en  $a$ .

**Indications.** Reprendre son cours si nécessaire.

**Exercice 3.4.** On définit dans le plan l'ensemble  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 + 3x^2y^2 + y^4 = 64\}$ .

1. Montrer que  $\Gamma$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Montrer que  $\Gamma$  admet une droite tangente en  $(2, 0)$ , dont on déterminera l'équation.
3. La courbe  $\Gamma$  admet-elle des tangentes horizontales? verticales?

**Indications.**

1. Comment montre-t-on qu'un tel ensemble est un fermé? Pour montrer qu'il est borné, considérer la limite quand  $\|(x, y)\| \rightarrow +\infty$  de  $x^6 + 3x^2y^2 + y^4$ .
2. Après avoir vérifié que  $(2, 0) \in \Gamma$ , si l'on ne connaît pas la formule générale pour la tangente à une telle courbe, on pourra se demander comment généraliser la formule donnant la tangente à une courbe  $\Gamma'$  d'équation  $y = f(x)$  en un point  $(a, f(a))$ , qui est pour rappel la droite  $\Delta'$  d'équation  $f'(a)x - y = f'(a)a - f(a)$ . Pour ce faire, on pourra voir  $\Gamma'$  comme la ligne de niveau 0 de la fonction  $g(x, y) = f(x) - y$  puis trouver un vecteur normal à la droite  $\Delta'$  ainsi qu'un point particulier de  $\Delta'$ .
3. Découle naturellement des observations de la question précédente.

**Exercice 3.5.** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ . On dit qu'une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en  $a$  suivant  $v$  si

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \text{ existe.}$$

Dans ce cas, ce nombre est appelé dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $v$  et est noté  $f'_v(a)$ . On suppose dans la suite que  $f$  est dérivable en  $a$  suivant  $v$ .

1. Soit  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(t) = f(a + tv)$ . Que peut-on dire de  $\phi$ ? À quoi correspondent les dérivées partielles de  $f$  si elles existent?
2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = y^2/x$  si  $x \neq 0$  et  $f(0, y) = y$ , pour tout  $y \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est dérivable au point  $(0, 0)$  suivant tout vecteur de  $v \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $f'_v(0, 0)$ . L'application  $f$  est-elle différentiable en  $(0, 0)$ ?
3. Supposons  $f$  différentiable en  $a$ . Montrer que, pour tout vecteur  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,

$$f'_v(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)v_i = \nabla f(a) \cdot v.$$

4. Soit  $\mathcal{S}(0, 1) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  pour la norme euclidienne. Notons

$$M = \sup_{v \in \mathcal{S}(0, 1)} f'_v(a).$$

Montrer que  $M$  est en fait un maximum atteint en un vecteur  $v \in \mathcal{S}(0, 1)$  que l'on peut expliciter et donner la valeur de  $M$ . Donner une interprétation géométrique.

5. Vous êtes sur une montagne dont la surface est donnée par l'équation  $z = \max(-x^2 - y^2 + 1800, 0)$ , au point  $A$  de coordonnées  $(20, 20, 1000)$ . Quelle direction devez-vous choisir pour atteindre le sommet au plus vite?

**Indications.**

1. Voir cours.
2. Bien observer qu'il s'agit d'étudier la limite, quand  $t \rightarrow 0$ , de  $\frac{f(tv)}{t}$ . Puis se remémorer que si  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$ , alors elle y est également continue.
3. Utiliser la définition de la différentielle.
4. Bien remarquer qu'il s'agit de la sphère unité pour la norme *euclidienne*. La norme euclidienne vérifie une propriété fameuse que les autres normes ne vérifient pas nécessairement et qui permet d'exploiter un peu plus l'expression démontrée à la question précédente, quelle est-elle?

1. On peut trouver, exactement de la même manière, l'équation du plan tangent, quand il existe, à une surface d'équation  $h(x, y, z) = 0$ . On peut même pousser la généralisation en dimension  $n$  et obtenir l'équation de l'hyperplan tangent à une surface  $h((x_i)_{1 \leq i \leq n}) = 0$ .

5. Ne pas se laisser embrouiller par le max, qui est complètement superflu au voisinage de  $A$ . Poser ensuite  $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 1800$ . Interpréter mathématiquement « atteindre le sommet au plus vite » comme « avoir la plus forte croissance en altitude possible dans l'immédiat »<sup>1</sup>, tout en se rappelant que l'altitude est exactement  $f(x, y)$  et que la croissance de  $f$  en  $(20, 20)$  dans une certaine direction<sup>2</sup>  $v = (v_1, v_2) \in \mathcal{S}(0, 1)$  est précisément  $f'_v(20, 20)$ .

**Exercice 3.6.** *Définition :* on dit d'une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  qu'elle est homogène de degré  $s > 0$  si :

$$\forall \lambda > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad f(\lambda x) = \lambda^s f(x).$$

Soit  $s > 0$  et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction homogène de degré  $s$  et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que les dérivées partielles de  $f$  sont homogènes de degré  $s - 1$  et que  $f$  vérifie l'équation d'Euler, c'est-à-dire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ ,

$$s f(x) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x).$$

À l'aide la fonction  $\phi : \lambda \mapsto \lambda^{-s} f(\lambda x)$ , montrer que la réciproque est vraie également (c'est-à-dire, toute solution  $\mathcal{C}^1$  de l'équation d'Euler ci-dessus est homogène de degré  $s$ ).

**Indications.** Très concrètement, quelles opérations/manipulations peut-on faire sur  $f$ ? En particulier, quelles opérations conduisant à des dérivées partielles?

Réponse : dériver !

Question subsidiaire : combien y a-t-il de variables par rapport auxquelles on peut dériver dans ce problème ?

Indication supplémentaire si la précédente ne suffit pas : écrire l'égalité  $f(\lambda x) = \lambda^s f(x)$  sous la forme  $g(\lambda, x) = h(\lambda, x)$ .

Pour la réciproque : connaissant le résultat, à quoi s'attend-on vis-à-vis de la fonction  $\phi$ ? Comment exploiter cette intuition ?

**Exercice 3.7.** Soit  $h$  une fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  admettant des dérivées partielles sur  $\mathbb{R}^2$  par rapport à chacune de ses deux variables. Donner l'expression des dérivées partielles des fonctions suivantes à l'aide de  $\partial_1 h$  et de  $\partial_2 h$  :

$$f(x, y) = h(x - y, x + y), \quad g(x, y) = h(x^2 + y^2, xy).$$

**Indications.** Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

1. Un modélisateur attentif remarquera que cette approche est particulièrement naïve et peut aisément être mise en défaut, par exemple en cachant des crevasses sur le trajet de plus forte pente, ou encore en prenant en compte le fait que la vitesse du promeneur décroît quand le dénivelé augmente. Par ailleurs, insistons sur le fait que le gradient ne pointe pas a priori vers le maximum de la fonction.

2. Une direction à deux dimensions car le promeneur ne peut pas s'envoler ! Il est obligé de se déplacer sur le sol de la montagne qui est localement une surface 2D (ce genre d'intuition géométrique conduit à définir ce qu'on appelle les sous-variétés différentielles). En d'autres termes, la question que se pose le promeneur en regardant sa carte IGN est « dois-je aller plutôt au nord, au sud, à l'est ou à l'ouest ? », qui est bien une question d'orientation 2D. On peut donc voir la sphère unité euclidienne de  $\mathbb{R}^2$  comme une rose des vents !

**Exercice 3.8.** Soit  $f$  une fonction  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  qui admet sur  $\mathbb{R}^2$  des dérivées partielles d'ordre 1. Si  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , donner l'expression de  $\frac{\partial g}{\partial r}$  et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  en fonction des dérivées partielles de  $f$ .

**Indications.** Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

**Exercice 3.9.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable sur  $\mathbb{R}^3$  telle que  $\partial f / \partial z = 0$ . En déduire l'expression générale de  $f$ .

**Indications.** Que dirait-on d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f' = 0$ ?

**Exercice 3.10.** (*Cours*) Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $a \in U$ . Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^1$  en  $a$  si ses dérivées partielles existent et sont continues en  $a$ . Montrer qu'une application  $\mathcal{C}^1$  en  $a$  est différentiable en  $a$ . Étudier la réciproque.

**Indications.** Voir cours. Toujours avoir un contre-exemple en tête pour ce genre de question. On peut construire un tel contre-exemple en repartant de la question similaire à une seule variable : trouver une fonction dérivable non- $\mathcal{C}^1$ .

**Exercice 3.11.** Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $h(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} + e^{2z}, x - y)$ . Montrer que  $h$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme entre deux ouverts  $U \subset \mathbb{R}^3$  et  $V \subset \mathbb{R}^3$  que l'on déterminera. Expliciter la matrice jacobienne associée.

**Indications.**  $U$  et  $V$  ne sont pas uniques, on peut construire deux paires distinctes  $(U_1, V_1)$  et  $(U_2, V_2)$ . Pour chacune de ces deux paires, on peut déterminer explicitement l'inverse de  $h$ . C'est exactement montrer que  $h$  (restreinte au départ à  $U_i$  et à l'arrivée à  $V_i$ ) est bijective. Pour ensuite répondre entièrement à l'exercice, il ne reste qu'une vérification routinière à faire.

Poser  $h(x, y, z) = (u, v, w)$  et calculer  $v - u$  en fonction de  $w$  et  $y$ . En déduire l'expression de  $y$  en fonction de  $(u, v, w)$  (attention, c'est ici qu'il faut préciser les ouverts!) puis en déduire la suite de l'inversion.

**Exercice 3.12.** 1. Montrer que les fonctions suivantes sont des  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphismes, respectivement de

$$]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus ([0, +\infty[ \times \{0\})$$

et de

$$]0, +\infty[ \times ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus ([0, +\infty[ \times \{0\} \times \mathbb{R}) :$$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

$$(r, \theta, z) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Pour chacune de ces fonctions, calculer la jacobienne associée et vérifier que le jacobien est toujours non-nul. Comment appelle-t-on ces changements de coordonnées?

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto A.x$ , est-elle un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme?

**Indications.** Exercice classique qui ne devrait poser aucun problème.

---

**Exercice 3.13.** On pose  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \in \Omega \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est différentiable sur  $\Omega$  et calculer sa différentielle.
2. Montrer que  $f$  est différentiable en  $(0, 0)$  et que sa différentielle est nulle.
3. Montrer que  $f$  admet en tout point des dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ , et calculer la valeur de ces dérivées en  $(0, 0)$ . Que peut-on en déduire pour la continuité de ces dérivées partielles secondes en  $(0, 0)$  ?

**Indications.**

1. Différentiabilité triviale. Les dérivées partielles sont (sans préciser, volontairement, laquelle est laquelle) :

$$\frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{-x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2 + y^2)^2}$$

2. Calculer les dérivées partielles par la définition, utiliser la définition de la différentiabilité et conclure le calcul par équivalence des normes. La question est posée de manière piègeuse : on détermine en fait un candidat pour la différentielle *avant* de montrer que la fonction est différentiable, comme toujours d'ailleurs.
3. Sur  $\Omega$ , c'est encore une fois trivial (on ne demande pas de les calculer sur  $\Omega$ , inutile de s'embarquer dans des calculs superflus !). Le calcul des dérivées partielles secondes croisées en  $(0, 0)$  se fait comme précédemment. On conclut à l'aide d'un théorème du cours sur les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ .

---

**Exercice 3.14.** 1. Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application convexe.

- (a) Montrer que pour tous  $a, b, c \in I$  tels que  $a < b < c$ ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$

On pourra commencer par faire un dessin. En déduire que pour  $x_0 \in I$ , l'application  $x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  est croissante sur  $I \setminus \{x_0\}$ .

- (b) En déduire que  $f$  admet une dérivée à gauche et à droite en tout point  $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ , puis que  $f$  est continue sur  $\overset{\circ}{I}$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application convexe,  $n \geq 2$ .
  - (a) Soient  $a$  et  $v$  deux éléments quelconques de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $t \mapsto f(a + tv)$  admet une dérivée à droite et à gauche en 0.
  - (b) Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  à coordonnées positives tel que  $\|u\|_1 = 1$ . Montrer par récurrence que

$$f(u) \leq \sum_{i=1}^n u_i f(e_i).$$

En déduire que  $f$  est bornée sur la sphère unité pour la norme  $\|\cdot\|_1$ .

- (c) Soit  $u \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|u\|_1 = 1$  et considérons  $\phi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\phi(\lambda) = f(\lambda u) - f(0)$ . Montrer que  $\phi$  est convexe. En déduire qu'il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  de norme  $\|u\|_1 = 1$ ,

$$-\lambda M \leq f(\lambda u) - f(0) \leq M\lambda \quad \forall \lambda \in [-1, 1].$$

(d) En déduire que  $f$  est continue à l'origine, puis qu'elle est continue sur tout  $\mathbb{R}^n$ .

**Indications.**

1. (a) Écrire  $b$  sous la forme  $ta + (1 - t)c$ , avec  $t \in ]0, 1[$ .  
 (b) On rappelle qu'une fonction monotone bornée converge.
2. (a) On est ramené à une fonction convexe de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .  
 (b) On peut généraliser sans difficultés l'inégalité pour les barycentres aux fonctions convexes de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Puis on voit  $u$  comme un barycentre de la famille  $(0, e_1, e_2, \dots, e_n)$ .  
 On peut ensuite répéter le procédé pour chacune des  $2^n$  familles  $(0, \epsilon_1 e_1, \dots, \epsilon_n e_n)$  avec  $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$  et obtenir ainsi la borne sur la sphère unité pour la norme 1.  
 (c) La convexité de  $\phi$  est aisément démontrée. On peut ensuite appliquer les résultats sur les fonctions convexes réelles à celle-ci tout en remarquant que  $\phi(0) = 0$ .  
 (d) Pour obtenir la convexité sur tout  $\mathbb{R}^n$ , on peut translater l'origine en posant  $f_a(u) = f(u + a)$ .

**Exercice 4.1.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application convexe et  $a \in \mathbb{R}^n$  tel que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Montrer que  $a$  est un minimum pour la fonction  $f$ . Pour cela, on pourra commencer par  $n = 1$ .

On pourra s'aider des résultats et des indications de l'Exercice 3.14.

**Indications.** Le cas  $n = 1$  se déduit facilement de la croissance d'une certaine fonction.

Le cas  $n \geq 2$  peut se faire en posant  $\phi_v : t \mapsto f(a + tv)$  pour  $v \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|v\|_1 = 1$  et en se ramenant au cas  $n = 1$ .

Attention, on ne sait pas que la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $v$  est nulle, on sait que les  $n$  dérivées partielles de  $f$  en  $a$  le sont ; c'est différent ! Mais en utilisant finement le fait que  $\|v\|_1 = 1$ , on va pouvoir en fait montrer bel et bien que la dérivée de  $f$  en  $a$  suivant  $v$  est nulle.

**Exercice 4.2.** Écrire le développement limité à l'ordre 2 des fonctions  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  et déterminer si le point est un point critique et, si oui, s'il s'agit d'un minimum local, d'un maximum local ou d'un point selle :

1.  $f(x, y) = \sin(x + 2y)$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;
2.  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  ;
3.  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 0)$ .

**Indications.** On a :

1.  $Df(x, y) = (\cos(x + 2y) \quad 2 \cos(x + 2y))$ ,  $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin(x + 2y) & -2 \sin(x + 2y) \\ -2 \sin(x + 2y) & -4 \sin(x + 2y) \end{pmatrix}$ .
2.  $Df(x, y) = \left( -\frac{2x}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \quad -\frac{2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \right)$ ,  $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{8x^2 - 2(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \\ \frac{8xy}{(x^2 + y^2 + 1)^3} & \frac{8y^2 - 2(x^2 + y^2 + 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^3} \end{pmatrix}$ .
3.  $Df(x, y) = (2(x - 1)e^{(x-1)^2} \cos y \quad -e^{(x-1)^2} \sin y)$ ,  
 $D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2e^{(x-1)^2} \cos y(1 + 2(x - 1)^2) & -2e^{(x-1)^2} (x - 1) \sin y \\ -2e^{(x-1)^2} (x - 1) \sin y & -e^{(x-1)^2} \cos y \end{pmatrix}$ .

*Remarque : est-il vraiment nécessaire de calculer les Hessiennes en toute généralité ?*

**Exercice 4.3.** Trouvez les points critiques des fonctions suivantes et déterminez si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle :

1.  $f(x, y) = x^3 + 6x^2 + 3y^2 - 12xy + 9x$  ;
2.  $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$  ;
3.  $f(x, y, z) = \cos 2x \cdot \sin y + z^2$  ;
4.  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ .

**Indications.** On a :

1.  $Df(x, y) = 3(x^2 + 4x - 4y + 3 \quad 2y - 4x)$ ,  $D^2f(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ .
2.  $Df(x, y) = (\cos x \quad 2y - 2)$ ,  $D^2f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
3.  $Df(x, y, z) = (-2 \sin(2x) \sin y \quad \cos(2x) \cos y \quad 2z)$   
 $D^2f(x, y, z) = \begin{pmatrix} -4 \cos(2x) \sin y & -2 \sin(2x) \cos y & 0 \\ -2 \sin(2x) \cos y & -\cos(2x) \sin y & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
4.  $Df(x, y, z) = 2(x + y + z) (1 \quad 1 \quad 1)$ ,  $D^2f(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 4.4.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$ .

1. Étudier les extrema locaux de  $f$ .
2. Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Montrer que  $f$  admet un maximum  $M$  et un minimum  $m$  sur  $D$ .
3. Soit  $(x, y) \in D$ . Montrer que si  $f(x, y) = M$  ou  $f(x, y) = m$ , alors  $x^2 + y^2 = 1$ .
4. Étudier la fonction  $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ . En déduire les valeurs de  $M$  et  $m$ .

**Indications.**

1.  $\nabla f(x, y) = 3 \begin{pmatrix} x^2 - (1 + y^2) \\ -2xy \end{pmatrix}$  et  $D^2f(x, y) = 6 \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}$ .
2. Que peut-on dire de l'ensemble  $D$  ?
3. « Simple »<sup>1</sup> déduction de la question 1. Bien comprendre ce qu'il se passe !
4. Étude de fonction réelle, certes un peu difficile. Penser aux astuces usuelles (isoler le terme dans la dérivée dont le signe est inconnu, etc.). On rappelle que

$$\cos(t)^2 - \sin(t)^2 = 2 \cos(t)^2 - 1 = \cos(2t).$$

**Exercice 4.5.** Quel est le point du plan d'équation  $(2x - y + z = 16)$  le plus proche de l'origine ? On pourra montrer que l'étude de ce problème revient à déterminer le minimum d'une fonction de deux variables que l'on trouvera.

**Indications.** Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Comment exprime-t-on la distance (euclidienne) entre ce point et l'origine ? Comment ensuite exploiter le fait qu'il s'agisse d'un point du plan ?

**Exercice 4.6.** Soit  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ . Montrer que  $f$  admet au plus un extremum. Écrire  $f(x, y) + 9$  comme la somme de deux carrés et en déduire que  $f$  admet  $-9$  comme valeur minimale.

1. et très classique !



**Indications.** Écrire  $f(x, y) + 9$  comme la somme de 2 carrés se fait par la fameuse « forme canonique ». Attention, il ne peut pas s'agir de la somme d'un carré n'impliquant que  $x$  et d'un autre carré n'impliquant que  $y$  à cause du terme  $xy$ . Il s'agit donc de d'abord « avaler » tous les termes dépendant d'une des deux variables  $y$  compris ce  $xy$ , ce qui créera nécessairement des termes dans l'autre variable, puis de transformer le reste en un carré de la seule variable restante.

On peut par exemple chercher une expression de la forme  $(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\delta y + \omega)^2$ .

On peut ensuite calculer explicitement et très facilement les coordonnées du point où est atteint le minimum !

**Exercice 4.7.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = x^2 - xy^2$ .

1. Montrer que  $(0, 0)$  est le seul point critique de  $f$ .
2. Montrer que  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local mais que pourtant la restriction de  $f$  à toute droite passant par  $(0, 0)$  admet en ce point un minimum local.

**Indications.**  $x \mapsto x^2(1 - \alpha^2 x)$  est équivalente au voisinage de 0 à  $x^2$ .

Pour montrer que  $(0, 0)$  n'est pas un extremum local de  $f$ , il faut trouver un « chemin »  $y = g(x)$  tel que  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  soit continue, satisfasse  $g(0) = 0$ , et tel que  $f(x, g(x))$  n'admette pas un minimum en 0. Chercher un  $g$  polynomial afin de pouvoir mettre à profit ce qu'on sait sur les polynômes au voisinage de 0.

**Exercice 5.1.** Pour les fonctions suivantes, déterminer, si cela a un sens, gradient, divergence et rotationnel :

$$f(x, y, z) = x^2 + 3xy, \quad g(x, y, z) = (3x^2 + yz, x^2 + yz \cos x, 3), \quad h(x, y, z) = (2x^2 + 5z, e^z, xy).$$

**Indications.** Sont définis  $\nabla f, \nabla \cdot g, \nabla \wedge g, \nabla \cdot h, \nabla \wedge h$ . On doit obtenir :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla \cdot g(x, y, z) &= 6x + z \cos x, \\ \nabla \wedge g(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -y \cos x \\ y \\ 2x - yz \sin x - z \end{pmatrix}, \\ \nabla \cdot h(x, y, z) &= 4x, \\ \nabla \wedge h(x, y, z) &= \begin{pmatrix} x - e^z \\ 5 - y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exercice 5.2.** 1. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $a \in \mathbb{R}^3$ . Déterminer divergence et rotationnel des fonctions suivantes  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  :

$$f(x) = \alpha x, \quad g(x) = \frac{x}{|x|}, \quad h(x) = a \wedge x.$$

2. (a) Soit

$$(u, v) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3).$$

Démontrer la formule :

$$\nabla \cdot (uv)(x) = \nabla u(x) \cdot v(x) + u(x) \nabla \cdot v(x),$$

(b) Calculer pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  la divergence de  $g_\lambda : x \mapsto \frac{x}{|x|^\lambda}$  en utilisant l'égalité

$$|x|^\lambda g_\lambda(x) = x.$$

Retrouver en particulier la divergence de  $g$ . Pour quelle valeur de  $\lambda$  la divergence de  $g_\lambda$  est-elle nulle ?

**Indications.**

1. Calculs faciles. Attention,  $g$  n'est pas différentiable (ni même continue) en 0.
2. Il s'agit d'une généralisation de  $(uv)' = u'v + uv'$ . La valeur de  $\lambda$  attendue pour annuler  $\nabla \cdot g_\lambda$  est un nombre entier strictement positif.

---

**Exercice 5.3.** Soit  $a \in \mathbb{R}^3$  et  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . Exprimer  $\operatorname{div}(a \wedge g)$  en fonction de  $a$  et  $\operatorname{rot} g$ .

**Indications.** Après un calcul simple, on doit aboutir à  $-a \cdot (\nabla \wedge g)$ .

---

**Exercice 5.4.** Soient  $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ . On pose

$$(f \cdot \nabla)g = f_1 \frac{\partial g}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial g}{\partial x_3}.$$

1. Expliquer, du point de vue du formalisme, la notation précédente.
2. Expliciter les coordonnées du vecteur  $(f \cdot \nabla)g$ .
3. Démontrer :  $\nabla(f \cdot g) = (f \cdot \nabla)g + f \wedge \operatorname{rot} g + (g \cdot \nabla)f + g \wedge \operatorname{rot} f$ .

**Indications.**

1. Ce qu'il faut bien observer est qu'a priori  $\nabla g$  n'a pas de sens. Donc  $(f \cdot \nabla)g$  ne peut pas être égal à  $f \cdot \nabla g$  !
2. Bien se demander quelle est la dimension de  $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ .
3. Il s'agit d'une généralisation de  $(uv)' = u'v + uv'$ .

---

**Exercice 5.5.** Soient  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  et  $V = ]0, +\infty[ \times ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . On définit la fonction

$$\begin{aligned} \Psi : V &\rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta). \end{aligned}$$

1. Montrer que  $U$  et  $V$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$  et que  $\Psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et bijective de  $V$  sur  $U$ . Déterminer  $\Psi^{-1}$ .
2. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . On pose

$$F(r, \theta) = f \circ \Psi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

- (a) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et calculer  $\frac{\partial F}{\partial r}$  et  $\frac{\partial F}{\partial \theta}$  en fonction de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .
- (b) Montrer que  $f$  vérifie l'équation

$$(E) \quad a \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + b \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad \forall (a, b) \in U$$

si et seulement si  $F$  vérifie l'équation

$$(E') \quad \frac{\partial F}{\partial r}(r_0, \theta_0) = \theta_0 \quad \forall (r_0, \theta_0) \in V.$$

(c) Déterminer toutes les fonctions  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  qui vérifient l'équation (E).

**Indications.**

1.  $U$  et  $V$  ouverts : peut se faire soit par la définition d'ensemble ouvert, soit par une fonction continue bien choisie.  $\Psi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  : trivial. Bijectivité et inverse : question classique qui ne doit pas poser de problème.
2. (a) Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

(b) Simple déduction des questions précédentes.

(c) Sachant que  $F$  est  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert connexe  $V$ , comment caractériser les fonctions  $F$  satisfaisant (E') ?

**Exercice 5.6.** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ . On cherche les fonctions  $f \in \mathcal{C}^1(D; \mathbb{R})$  qui vérifient

$$(E) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$$

1. Vérifier que  $\varphi(x, y) = y/x$  est solution de (E).
2. Soit  $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Montrer que  $g \circ \varphi$  est solution de (E).
3. Soit  $f$  une solution de (E). Montrer que  $f(u, uv)$  ne dépend que de  $v$ .
4. Donner l'ensemble des solutions de (E).

**Indications.**

1. Simple calcul.
2. Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

3. La fonction  $(u, v) \mapsto f(u, uv)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ , définie sur l'ouvert connexe  $D$ , ne dépend que de  $v$  ssi sa dérivée partielle par rapport à  $u$  est nulle.
4. La question 3 est à comprendre comme une réciproque de la question 2. Si  $f(u, uv)$  ne dépend que de  $v$ , peut-on mettre  $f$  sous la forme  $g \circ \varphi$  ?

**Exercice 5.7.** On cherche les fonctions  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) + 2u \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) = 0 \quad \text{pour tout } (u, v) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Soit  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application définie par  $\phi(x, y) = (x, y + x^2)$ .

1. En calculant l'application réciproque, montrer que  $\phi$  est bijective. Vérifier que  $\phi$  et  $\phi^{-1}$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$ .
2. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Posons  $g = f \circ \phi$ .
  - (a) Montrer que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .
  - (b) Montrer que  $f$  est solution de (1) si et seulement si  $\frac{\partial g}{\partial x} = 0$ .
3. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que  $f$  vérifie (1) si et seulement s'il existe une fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $f(u, v) = h(v - u^2)$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

**Indications.**

1. Expliciter l'application réciproque, c'est exactement montrer la bijectivité.
2. Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

3. Puisque  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  et  $\mathbb{R}^2$  est connexe,  $\partial_x g = 0$  ssi il existe une fonction  $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $g(x, y) = h(y)$ .

*Remarque : la même méthode permet de déterminer les solutions de l'équation de transport à coefficients constants (voir cours). Elle peut être généralisée assez largement.*

**Exercice 5.8.** Résoudre l'équation des cordes vibrantes :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$  à l'aide du changement de variables  $u = \frac{x+y}{2}$  et  $v = \frac{x-y}{2}$  (on suppose que  $f$  est  $\mathcal{C}^2$ ).

**Indications.** Voir les exercices 5.5, 5.6, 5.7 pour la méthodologie générale. Il s'agit de vérifier que le changement de variables proposé induit bien un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, de trouver une égalité équivalente à l'équation des cordes vibrantes dans ces nouvelles variables, puis de traduire concrètement cette égalité équivalente pour obtenir l'ensemble des solutions.

- Exercice 6.1.**
1. Montrer que l'équation  $x^5 + 3xy - y^6 = 1$  définit  $y$  comme une fonction implicite de  $x$  au point  $(1, 0)$ . On note  $\phi$  cette application.
  2. Retrouver la formule générale permettant de calculer  $\phi'$  au voisinage de  $x = 1$ . En déduire  $\phi'(1)$  et  $\phi''(1)$ .

**Indications.**

1. Poser  $f(x, y) = x^5 + 3xy - y^6 - 1$  et chercher à appliquer à  $f$  le théorème des fonctions implicites.
2. Pour « montrer » que  $\phi$  est deux fois dérivable, il faut invoquer le raffinement du théorème des fonctions implicites qui dit que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $\phi$  l'est aussi. Ensuite, pour calculer  $\phi'(1)$  et  $\phi''(1)$ , il faut dériver deux fois avec la formule de la chaîne l'égalité  $f(x, \phi(x)) = 0$ , vraie dans un voisinage de 1. Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

- Exercice 6.2.**
1. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = x^2 + y^4 - 3xy + x - 1$ . Montrer qu'on peut appliquer à  $f$  le théorème des fonctions implicites au voisinage du point  $(2, 1)$ .
  2. Notons  $\phi$  la fonction implicite. Montrer que  $\phi$  est deux fois dérivable. En déduire un développement limité de  $\phi$  à l'ordre 2 au point  $x = 2$ .

**Indications.**

1. Application directe du cours.
2. Pour « montrer » que  $\phi$  est deux fois dérivable, il faut invoquer le raffinement du théorème des fonctions implicites qui dit que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $\phi$  l'est aussi. Pour obtenir  $\phi'$  et  $\phi''$ , il faut dériver deux fois avec la formule de la chaîne l'égalité  $f(x, \phi(x)) = 0$ , vraie dans un voisinage de 2. Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

**Exercice 6.3.** Montrer que les relations proposées définissent, au voisinage du couple  $(a, b)$  indiqué, une fonction implicite  $y = \phi(x)$ . Donner un développement limité à l'ordre 3 de  $\phi$  en  $a$ .

1.  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1 = 0$ ,  $(a, b) = (0, 1)$

2.  $f(x, y) = 2e^{x+y-1} + \ln(x-y) - 2x + y^3$ ,  $(a, b) = (1, 0)$

**Indications.** Application directe du cours. Pour « montrer » que  $\phi$  est trois fois dérivable, il faut invoquer le raffinement du théorème des fonctions implicites qui dit que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , alors  $\phi$  l'est aussi. Pour obtenir  $\phi'$ ,  $\phi''$  et  $\phi'''$ , il faut dériver deux fois avec la formule de la chaîne l'égalité  $f(x, \phi(x)) = 0$ , vraie dans un voisinage de  $a$ . Rappel sur la formule de la chaîne : pour trois fonctions  $a$ ,  $b$  et  $c$ , compatibles vis-à-vis de la composition de sorte que  $a \circ b = c$ , on a

$$Dc(X) = Da(b(X)).Db(X).$$

**Exercice 6.4.** On considère la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy + 1$ . Montrer que  $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$  est non vide et que  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En quel(s) point(s)  $\mathcal{F}$  n'est-il pas le graphe d'une fonction de la première coordonnée  $x$  ?

**Indications.** Pour montrer que  $\mathcal{F}$  est non-vide, il suffit d'exhiber un point de  $\mathbb{R}^2$  qui soit dedans.

Ensuite il s'agit de déterminer l'ensemble des points de  $\mathcal{F}$  auxquels on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire l'ensemble des points de  $\mathcal{F}$  où une hypothèse au moins du théorème n'est pas vérifiée. Le théorème a, a priori, plusieurs hypothèses, mais ici une seule peut éventuellement ne pas être vérifiée : laquelle ?

**Exercice 7.1.** Calculer

$$\int_0^1 \left( \int_0^y x^2 dx \right) dy, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^x -\sin(x^2) dy \right) dx,$$

$$\int_0^1 \left( \int_{1-x}^{1+x} (2x + 3y^2) dy \right) dx, \quad \int_0^1 \left( \int_0^2 \left( \int_0^{\sqrt{4-z^2}} 2z \sin(y) dx \right) dz \right) dy.$$

**Indications.** Les résultats sont (dans l'ordre)  $\frac{1}{12}$ ,  $-1$ ,  $\frac{29}{6}$ ,  $\frac{32}{3} \sin\left(\frac{1}{2}\right)^2$ .

**Exercice 7.2.** En utilisant le théorème de Fubini, calculer

$$\iint_D 2xy dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\},$$

$$\iint_D e^{x/y} dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq 2y^3\}.$$

**Indications.** Les résultats sont (dans l'ordre)  $\frac{1}{6}$  et  $\frac{e(-6-e+e^7)}{4}$ .

**Exercice 7.3.** Soit  $R > 0$ ,  $D_R = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2, x > 0, y > 0\}$  et  $K_R = [0, R]^2$ . Montrer que :

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{D_{2R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

En déduire l'existence et la valeur de  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R e^{-t^2} dt$ .

**Indications.** Les inclusions  $D_R \subset K_R \subset D_{2R}$  sont strictes. Ensuite les intégrales sur  $D_R$  et  $D_{2R}$  peuvent être calculées par changement de variables en coordonnées polaires et l'intégrales sur  $K_R$  peut être réécrite via le théorème de Fubini.

**Exercice 7.4.** En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de  $f$  sur  $D$  avec

1.  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2 + y^2 \leq 4\pi^2\}$ ;  $f(x, y) = \sin \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
2.  $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$  avec  $a, b > 0$ ;  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ;
3.  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$  avec  $h > 0$ ;  $f(x, y, z) = z$ .

**Indications.** Les résultats sont :

1.  $-6\pi^2$ ,
2.  $\frac{\pi ab(a^2 + b^2)}{4}$ ,
3.  $\frac{\pi h^2}{2}$ .

**Exercice 7.5.** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 < y < 2x^2, 1/x < y < 2/x\}$ .

1. Montrer que  $(x, y) \mapsto (y/x^2, xy)$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $D$  sur  $]1, 2[^2$ . Calculer le déterminant de sa matrice jacobienne.
2. Utiliser ce changement de variables pour calculer  $\iint_D (x + y) dx dy$ .

**Indications.**

1. On peut calculer directement l'inverse de  $(x, y) \mapsto (\frac{y}{x^2}, xy)$ .
2. On pose  $\phi(u, v) = (x, y)$ ,  $\phi : ]1, 2[^2 \rightarrow D$ , et on applique la formule de changement de variables du cours. Attention, c'est le jacobien de  $\phi$  qui entre en jeu, pas le jacobien de la question 1! Il faut aboutir au résultat suivant :  $\frac{3}{40} \left( 10 + 12 \cdot 2^{\frac{1}{3}} - 11 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \right)$ .

**Exercice 7.6.** Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\iint_D \frac{dx dy}{(xy + 1)^2}$  avec  $D = [1, 2]^2$ ;
2.  $\iiint_D (x + y + z) dx dy dz$  avec  $D = [0, 1]^3$ .

**Indications.** Il faut obtenir :

1.  $\log \left( \frac{10}{9} \right)$ ,
2.  $\frac{3}{2}$ .

**Exercice 7.7.** Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ . Montrer que

$$\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = -\frac{1 + \ln 2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \pi.$$

**Indications.** Surtout pas de coordonnées polaires! Écrire directement le théorème de Fubini sous la forme :

$$\iint_D d(x, y) = \int_0^1 \int_0^{1-x} dy dx.$$

**Exercice 7.8.** Calculer  $\iint_D xy \, dx \, dy$  où  $D = \{(x, y) : x, y \geq 0, x^2/4 + y^2/9 \leq 1\}$ .

**Indications.** Passer en « coordonnées elliptiques »  $(x, y) = (2r \cos \theta, 3r \sin \theta)$ . On doit obtenir  $\frac{9}{2}$ .

---

**Exercice 7.9.** Pour chacun des cas suivants, vérifier que  $\varphi$  définit bien un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\tilde{D} = \varphi^{-1}(D)$  sur  $D$  en explicitant  $\tilde{D}$ , calculer le jacobien de  $\varphi$  et calculer l'intégrale en utilisant le changement de variables  $(x, y) = \varphi(u, v)$  :

1.  $\varphi(u, v) = (\frac{1}{3}(u+v), \frac{1}{3}(v-2u))$ ;  $I = \iint_D (3x+y) \, dx \, dy$ , où  $D$  est le domaine borné par les droites  $y = x-2$ ,  $y = x$ ,  $y = -2x$  et  $y = 3-2x$ .
2.  $\varphi(u, v) = (2u+3v, 3u-2v)$ ;  $J = \iint_D (2x+y) \, dx \, dy$ , où  $D$  est le carré de sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(5, 1)$ ,  $(3, -2)$ .
3.  $\varphi(u, v) = (\frac{u}{v}, v)$ ;  $K = -\iint_D xy \, dx \, dy$ , où  $D$  est dans le premier quadrant et borné par les droites  $y = x$ ,  $y = 3x$  et les hyperboles  $xy = 1$ ,  $xy = 3$ .

**Indications.** Les intégrales valent :

1.  $\frac{14}{3}$ ,
  2.  $\frac{143}{2}$ ,
  3.  $-2 \ln(3)$ .
- 

**Exercice 7.10.** Calculer le volume compris entre

1. la surface d'équation  $z = x^2 + y^2$  et le plan  $z = 4$ ,
2. les surfaces d'équation  $z = x^2 + y^2 - 1$  et  $z = 1 - x^2 - y^2$ ,
3. la surface d'équation  $z = x^2 + 4y^2$  et le plan  $z = 4$ ,
4. la surface d'équation  $z^2 = x^2 + y^2$  et le plan  $z = 1$ .

**Indications.** Les volumes valent :

1.  $8\pi$ ,
  2.  $\pi$ ,
  3.  $4\pi$ ,
  4.  $\frac{\pi}{3}$ .
- 

**Exercice 7.11.** Trouver le centre de gravité de la plaque homogène limitée par la parabole  $y = 2x^2$  et la droite  $y = 2$ .

**Indications.** L'aire de cette plaque vaut  $A = \frac{8}{3}$ . Les coordonnées du centre de gravité  $G$  sont  $(x_G, y_G) = (0, \frac{6}{5})$ .

*Remarque : par symétrie et sans aucun calcul, on peut obtenir que  $x_G = 0$ .*

---

**Exercice 7.12.**

1. (*Cours*)
  - (a) Rappeler la définition d'une fonction intégrable sur un ensemble  $E \subset \mathbb{R}$ .
  - (b) Montrer que  $t \mapsto 1/t^p$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$  si et seulement si  $p > 1$ .

(c) Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $C > 0$ ,  $p > 1$  et  $M > 0$  tels que

$$|f(x)| \leq \frac{C}{|x|^p} \quad \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq M.$$

Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

(d) Montrer que  $t \mapsto 1/|t|^p$  est intégrable sur  $[-1, 1] \setminus \{0\}$  si et seulement si  $p < 1$ .

2. On considère maintenant l'application de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x) = \frac{1}{\|x\|^p}, \quad p > 0.$$

(a) Soient  $R_1$  et  $R_2$  tels que  $0 < R_1 < R_2$ , et  $D(R_1, R_2) = \{x \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leq \|x\| \leq R_2\}$ . Calculer

$$\int_{D(R_1, R_2)} f(x) \, dx.$$

(b) En déduire que  $f$  est « intégrable » (en précisant quel sens on donne à cette intégrabilité) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$  si et seulement si  $p > 2$ .

(c) Refaire l'exercice dans  $\mathbb{R}^3$  et montrer que la condition d'intégrabilité est alors  $p > 3$ .

**Remarque :** Pour une dimension  $n$  quelconque, on peut montrer que la fonction  $f$  précédemment définie est intégrable sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 1)$  si et seulement si  $p > n$ .

### Indications.

1. Exercice classique qui ne doit poser aucune difficulté.

2. (a) Passer en polaires pour se ramener au cas 1D.

(b) Dédution immédiate. L'intégrabilité donc il est ici question est naturellement définie ainsi :  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$  si

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D(1, R)} f(x) \, dx < +\infty.$$

(Cette limite existe dans tous les cas par positivité de  $f$  qui implique la monotonie de l'intégrale par rapport à  $R$ .) La limite précédente est alors appelée intégrale de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)$  et est notée  $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, 1)} f(x) \, dx$ .

(c) Passer en sphériques.

**Exercice 7.13.** 1. Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . À quelle condition l'application  $\phi$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  définie par  $\phi(x) = Ax$  est-elle un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme global de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  ?

2. Supposons  $A$  symétrique définie positive. Montrer qu'il existe une matrice symétrique définie positive  $Q$  telle que  $Q^2 = A$ .

3. Montrer que  $x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$  est « intégrable » (en précisant quel sens on donne à cette intégrabilité, voir Exercice 7.12) sur  $\mathbb{R}^n$ .

4. On rappelle que  $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2) \, dx = \sqrt{\pi}$ . On pose  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . En utilisant le changement de variable  $y = Qx$ , calculer

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-x^*Ax) \, dx_1 \, dx_2 \cdots dx_n.$$

### Indications.

1. Facile.

2. Classique, voir un cours d'algèbre linéaire.

3. Même définition d'intégrabilité que pour l'exercice 7.12. L'intégrabilité de  $x \mapsto \exp(-\|x\|^2)$  peut s'obtenir directement par théorème de Fubini en utilisant les propriétés de morphisme de l'exponentielle ou bien en passant en coordonnées sphériques à  $n$  dimensions<sup>1</sup>.

1. Le jacobien étant alors  $r^{n-1}$  (comment le redémontrer ?).



4. Le jacobien du changement de variable  $y = Qx$  n'est autre que  $\det(Q)$ . Celui-ci s'exprime en fonction de  $\det(A)$ , qui s'exprime lui-même en fonction des valeurs propres de  $A$ . (En particulier,  $\det(Q) > 0$  et il n'y a donc pas lieu de s'inquiéter de la valeur absolue dans la formule du changement de variables.)

**Exercice 8.1.** Dire si les arcs paramétrés  $\Gamma = (\gamma, I)$  suivants sont de classe  $\mathcal{C}^1$ . Tracer alors l'allure de l'objet géométrique qu'ils paramétrisent et calculer leur longueur.

1.  $\gamma(t) = (t^2, t^4)$ ,  $I = [0, 1]$  ;
2.  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $I = [0, 1]$  ;
3.  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t, at)$ ,  $I = [0, 2\pi]$ ,  $a > 0$ ,  $R > 0$ .

**Indications.** Il y a quelque chose à remarquer concernant le premier et le second arc !

Le calcul de la longueur se fait à l'aide de la formule du cours :

$$L(\Gamma) = \int_I |\gamma'(t)| dt.$$

**Exercice 8.2.** Donner une paramétrisation décrivant chacun des arcs  $\mathcal{C}$  suivants :

1. le segment de droite allant de  $O = (0, 0)$  à  $A = (a, b)$  ;
2.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 - 4 = 0, y \geq 0\}$  (de quel objet géométrique s'agit-il?) ;
3.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y = 0\}$  (même question) ;
4. le triangle de sommets  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$ ,  $B = (0, 1)$ .

**Indications.** Ne devrait pas poser de difficulté.

**Exercice 8.3.** Soit  $\Gamma$  l'arc limité par les points  $A(1, 0, 0)$  et  $B(1, 0, 2\pi)$  de la trajectoire du mouvement dont le vecteur vitesse est  $\vec{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

1. Déterminer une paramétrisation de  $\Gamma$  puis représenter  $\Gamma$ .
2. Soit  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  le champ de vecteur défini par  $V(x, y, z) = (4xy, 3y^2, 5z)$ . Calculer la circulation de  $V$  le long de  $\Gamma$ .

**Indications.**

1. Il existe une paramétrisation  $\gamma$  évidente étant donné un vecteur vitesse  $\vec{v}$ .
2. Rappelons que par définition, la circulation de  $V$  le long de  $\Gamma = (\gamma, [0, 2\pi])$  vaut

$$\int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Le résultat vaut  $10\pi^2$ .

**Exercice 8.4.** Soit  $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  le champ de vecteur défini, pour  $(x, y) \neq (0, 0)$  par  $V(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$  et  $C$  le cercle de rayon  $R > 0$ , centré à l'origine, parcouru dans le sens direct. Calculer

$$I = \int_C V(x, y) \cdot \tau(x, y) dl.$$

Représenter le champ de vecteur  $\tilde{V}(x, y) = (x^2 + y^2)V(x, y)$  puis représenter  $V$ . En concevant  $V$  comme un champ de vitesses constant dans un fluide en mouvement, décrire qualitativement la trajectoire d'une particule de fluide initialement située dans un voisinage pointé de  $(0, 0)$ . Comment interpréter physiquement la valeur de  $I$ ? Retrouver graphiquement cette valeur.

*Remarque : il n'est pas interdit de se demander quelle situation physique pourrait bien induire un tel champ de vitesses !*

**Indications.**  $I$  n'est autre que la circulation de  $V$  le long de  $C$ , qui, étant donnée une paramétrisation  $(\gamma, I)$  de  $C$ , s'écrit également ainsi :

$$\int_I V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Il s'agit donc de trouver une paramétrisation de  $C$ , ce qui ne devrait pas poser de difficulté!

---

**Exercice 8.5.** Calculer la circulation du champ de vecteurs  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$P(x, y) = (2xe^{x^2-2y}; -2e^{x^2-2y})$$

le long du chemin

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (\ln(1+t), e^t + 1).$$

**Indications.** Le champ de vecteurs  $P$  est un champ gradient (autrement dit, la forme différentielle associée est une forme exacte). Cette observation simplifie considérablement le calcul.

Le résultat vaut  $e^{-4} (e^{2-2e+\ln(2)^2} - 1)$ .

---

**Exercice 8.6.** Soit le champ de vecteurs  $V$  sur  $\mathbb{R}^2$  défini par  $V(x, y) = (2xy + e^y, x^2 + xe^y)$ . Calculer la circulation de  $V$  le long de la parabole  $x = y^2$  entre les points  $(0, 0)$  et  $(1, 1)$ .

**Indications.** Le champ de vecteurs  $V$  est un champ gradient (autrement dit, la forme différentielle associée est une forme exacte). Cette observation simplifie considérablement le calcul.

Le résultat vaut  $1 + e$ .

---

**Exercice 8.7.** On rappelle que la circulation d'un champ de vecteur le long d'une courbe peut être interprétée physiquement comme le travail d'une force (le champ de vecteur) le long d'un chemin (la courbe).

Un point matériel est soumis au champ de forces  $F(x, y, z) = (2x - y + 3z, z + 4y, 2xz + y + x^2)$  le long de l'ellipse  $E$  d'équation paramétrique

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad z = 0,$$

avec  $0 \leq t \leq 2\pi$  (parcourue dans le sens trigonométrique). Déterminer les coefficients  $a$  et  $b \in \mathbb{N}$  avec  $3 < a < b$  sachant que le travail  $W$  de  $F$  le long de  $E$  vaut  $32\pi$ .

**Indications.** Pour des coefficients  $a$  et  $b$  quelconques,  $W_{a,b}$  vaut  $\pi ab$ .

---

**Exercice 8.8.** On rappelle la formule de Green : soient  $\Gamma$  un arc paramétré  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  fermé, simple et orienté dans le sens direct,  $D$  le domaine intérieur de  $\Gamma$  (se trouvant sur sa gauche dans le sens de parcours de  $\Gamma$ ) et  $F = (P, Q)$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ . Alors la circulation de  $F$  le long de  $\Gamma$  est égale à l'intégrale double suivante :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Soit  $a > 0$ .

1. Soit l'astroïde d'équations paramétriques

$$x(t) = a \cos^3 t, \quad y(t) = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Représenter cette courbe puis calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire ainsi délimitée.

2. Soit la lemniscate de Bernoulli, dont l'équation polaire est

$$r^2 = a^2 \cos(2\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Représenter cette courbe puis calculer à l'aide d'une intégrale curviligne l'aire ainsi délimitée. Proposer une autre méthode pour calculer cette aire en tirant profit des symétries de la lemniscate de Bernoulli.

**Indications.** À chaque fois, un couple  $(P, Q)$  qui convient est simplement  $\frac{1}{2}(-y, x)$ , puisqu'en effet on a alors  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ .

1. L'aire vaut  $\frac{3\pi a^2}{8}$ .

2. Ici il faut procéder à un changement de variables dans le calcul de la circulation de  $F$  pour passer en coordonnées polaires. L'aire vaut  $a^2$ .

**Exercice 8.9.** On rappelle la formule d'Ostrogradsky : soient  $\Gamma$  un arc paramétré  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  fermé, simple et orienté dans le sens direct,  $D$  le domaine intérieur de  $\Gamma$  (se trouvant sur sa gauche dans le sens de parcours de  $\Gamma$ ) et  $F = (P, Q)$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ . Alors le flux de  $F$  à travers  $\Gamma$  est égal à l'intégrale double de la divergence de  $F$  sur  $D$ .

On considère  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  et  $\Gamma = \partial K$ . Soit  $g$  le champ de vecteurs de composantes  $g_1(x, y) = x + \sin y$  et  $g_2(x, y) = y + \cos x$ . Établir une relation entre le flux  $\mathcal{F}(g; \Gamma)$  de  $g$  sur  $\Gamma$  et l'aire de  $K$ , puis en déduire la valeur de  $\mathcal{F}(g; \Gamma)$ .

**Indications.** Que vaut la divergence de  $g$  ?

**Exercice 8.10.** On rappelle la formule de Green : soient  $\Gamma$  un arc paramétré  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  fermé, simple et orienté dans le sens direct,  $D$  le domaine intérieur de  $\Gamma$  (se trouvant sur sa gauche dans le sens de parcours de  $\Gamma$ ) et  $F = (P, Q)$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ . Alors la circulation de  $F$  le long de  $\Gamma$  est égale à l'intégrale double suivante :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

À l'aide de la formule de Green, calculer

$$\int_{\partial D} V(x, y) \cdot \tau(x, y) d\ell$$

quand :

1.  $V(x, y) = (x^2 y, x y^3)$  et  $D$  est le carré de sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(0, 2)$  ;
2.  $V(x, y) = (2xy, y^5)$  et  $D$  est le triangle de sommets  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(2, 1)$  ;
3.  $V(x, y) = (3(y + e^{\sqrt{x}}), 2x + \cos y^2)$  et  $D$  est délimité par les paraboles d'équations  $y = x^2$  et  $x = y^2$  ;
4.  $V(x, y) = (x^3 y, 2x^4)$  et  $\partial D$  est la courbe d'équation  $x^4 + y^4 = 1$ .

**Indications.** Les résultats sont (dans l'ordre)  $\frac{8}{3}$ ,  $-\frac{8}{3}$ ,  $-\frac{1}{3}$ ,  $0$ .

*Remarque : le dernier résultat ne pouvait-il s'obtenir plus directement, par symétrie ?*

**Exercice 8.11.** On rappelle la formule de Green : soient  $\Gamma$  un arc paramétré  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}^2$  fermé, simple et orienté dans le sens direct,  $D$  le domaine intérieur de  $\Gamma$  (se trouvant sur sa gauche dans le sens de parcours de  $\Gamma$ ) et  $F = (P, Q)$  un champ de vecteurs  $\mathcal{C}^1$  sur  $D$ . Alors la circulation de  $F$  le long de  $\Gamma$  est égale à l'intégrale double suivante :

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

À l'aide de la formule de Green, calculer :

1.  $\iint_D xy \, dx \, dy$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, x + y \leq 2\}$ ;

2.  $\iint_D \frac{dx \, dy}{(x + y)^2}$ , où  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : xy \geq 1, x + y \leq 4\}$ .

**Indications.** Les résultats sont (dans l'ordre)  $\frac{2}{3}$  et  $\ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Il n'y a pas une seule bonne réponse pour le couple  $(P, Q)$  à choisir, bien évidemment ! Cela dit il faut faire au plus simple afin que le calcul qui suit soit aisé.