

La Conjecture de Bieberbach

Manon CESAIRE (avec l'aide de Jiandi ZOU)

Année : 2016-2017

Table des matières

1	Quelques résultats d'analyse complexe	4
2	Classe <i>Schlicht</i> et fonction de Koebe	5
2.1	Définitions	5
2.2	Propriétés de la fonction de Koebe	7
3	Cas particuliers des coefficients réels	10
4	Le second coefficient	14
4.1	Théorème de Bieberbach	14
4.2	Conséquences du théorème de Bieberbach	22
5	La méthode de Loewner	45
5.1	Définitions préliminaires	45
5.2	Densité des fonctions slit	49
5.3	Existence et unicité des chaînes des Loewner	52
5.4	Equation différentielle de Loewner	56
5.5	Le troisième coefficient	58
5.6	Compacité des chaînes de Loewner	69
5.7	Démonstration du théorème 5.16	71

Introduction

La conjecture de Bieberbach est un problème qui a occupé de nombreux mathématiciens depuis le début du XX^e siècle.

L'énoncé de cette conjecture est le suivant, les notions abordées seront développées dans la suite de ce mémoire :

CONJECTURE DE BIEBERBACH (1916 – DE BRANGES 1984) :

Soit f une fonction analytique injective sur le disque unité \mathbb{D} dont le développement en série entière s'écrit :

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{avec} \quad a_2, a_3, \dots \in \mathbb{C}.$$

Alors :

$$\forall n \geq 2, |a_n| \leq n.$$

De plus, l'inégalité est stricte pour tout $n \geq 2$, sauf si f est une « rotation de Koebe ».

Autrement dit s'il existe $n_0 \geq 2$ tel que $|a_{n_0}| = n_0$, alors f est une rotation de la « fonction de Koebe ».

C'est en 1916 que le mathématicien allemand Ludwig Bieberbach a énoncé cette conjecture portant sur les fonctions holomorphes injectives sur le disque unité, après l'avoir démontrée dans le cas $n = 2$. Charles Loewner a quant à lui prouvé le cas $n = 3$ en 1923.

Toutefois, malgré son énoncé *a priori* simple, c'est que 68 ans plus tard que cette conjecture fut complètement démontrée par le mathématicien français Louis de Branges en 1984.

Dans ce mémoire, nous allons essentiellement traiter les démonstrations des cas $n = 2$ et $n = 3$.

1 Quelques résultats d'analyse complexe

Avant d'introduire les premières notions essentielles à l'étude de la conjecture de Bieberbach, rappelons quelques théorèmes classiques d'analyse complexe qui seront importants dans la suite.

Notation 1.1. On notera dans toute la suite de l'étude \mathbb{D} le disque unité défini par $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Théorème 1.2 (Lemme de Schwarz). *Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité \mathbb{D} vérifiant $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ sur \mathbb{D} . Alors :*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a $|f(z)| \leq |z|$ et $|f'(z)| \leq 1$.*
2. *S'il existe $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |a|$ ou si $|f'(0)| = 1$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| = 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = \lambda z$.*

Notation 1.3. On note $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes définies sur Ω .

Théorème 1.4 (Théorème de Hurwitz). *Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes injectives convergeant dans $\mathcal{H}(\Omega)$ vers une fonction f . Alors soit f est injective, soit f est constante.*

Théorème 1.5 (Théorème de Montel). *Soit Ω un ouvert non vide de \mathbb{C} . De toute suite localement uniformément bornée dans $\mathcal{H}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω .*

Ces deux théorèmes permettront de montrer que la « classe de Schlicht » – que l'on définira par la suite – est un ensemble compact de l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} .

Définition 1.6. *On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \mapsto X$ est un chemin de Jordan si γ est injectif. De plus, on dit que γ est un lacet de Jordan si γ est un lacet et si la restriction de γ à $[a, b[$ est injective.*

Définition 1.7. *Une courbe de Jordan $\Gamma \subset X$ est dite simple si Γ est l'image continue d'un chemin de Jordan. Par ailleurs, Γ est une courbe de Jordan fermée si Γ est l'image continue d'un lacet de Jordan.*

Proposition 1.8. *Une courbe de Jordan fermée est homéomorphe au cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Une courbe de Jordan simple est homéomorphe au segment $[0, 1]$.*

Théorème 1.9 (Théorème de Représentation Conforme). *Soit Ω un ouvert simplement connexe non vide de \mathbb{C} et distinct de \mathbb{C} . Alors il existe un biholomorphisme f entre Ω et le disque unité \mathbb{D} . On dit alors que \mathbb{D} et Ω sont conformément équivalents.*

De plus, si on a $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$ alors f est unique.

Ce théorème sera utile dans la dernière partie, il permettra de montrer l'existence d'une unique application conforme dans la théorie des « chaînes de Loewner ».

Définition 1.10. *Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un domaine de Jordan si Ω est l'intérieur d'une courbe de Jordan fermée.*

Théorème 1.11 (Théorème de prolongement Carathéodory). *Si Ω et Ω' sont deux domaines de Jordan, alors tout biholomorphisme entre Ω et Ω' s'étend en un homéomorphisme entre $\overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega'}$.*

Théorème 1.12 (Théorème de Jordan). *Si Γ est une courbe de Jordan fermée dans \mathbb{C} alors $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ a exactement deux composantes connexes. De plus, la frontière de ces deux composantes connexes est égale à Γ .*

Ce dernier théorème justifiera le caractère borné d'un ensemble.

2 Classe *Schlicht* et fonction de Koebe

On introduit une classe de fonctions utile dans l'étude de la conjecture de Bieberbach.

2.1 Définitions

Définition 2.1. *On appelle classe Schlicht (« simple » en allemand) normalisée l'ensemble \mathcal{S} des fonctions analytiques et injectives $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que :*

- $f(0) = 0$;
- $f'(0) = 1$.

On appellera un élément de \mathcal{S} une \mathcal{S} -fonction.

Dès lors une \mathcal{S} -fonction est un élément qui admet un développement en série entière sur \mathbb{D} tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Les coefficients de Taylor de la fonction f s'expriment alors sous la forme $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \geq 2$.

Exemple 2.2. *La fonction identité sur \mathbb{D} $f : z \mapsto z$ est clairement dans \mathcal{S} .*

Proposition 2.3. *Si $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction analytique injective qui n'est pas normalisée alors*

$$g : z \mapsto \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)} \in \mathcal{S}$$

Démonstration. L'injectivité de g découle directement de celle de f . On sait que $f \in \mathcal{S}$ donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et le développement en série entière de f donne :

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} - f(0)}{f'(0)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{f'(0) n!} \\ &= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{f'(0) n!}. \end{aligned}$$

□

Remarque 2.4. *On en déduit donc que g a les mêmes propriétés que celles de f et on peut sans perte de généralité supposer qu'une fonction analytique injective sur \mathbb{D} est dans \mathcal{S} .*

On va à présent définir une fonction de la classe Schlicht \mathcal{S} fondamentale pour la suite de l'étude : la fonction de Koebe. Elle intervient dans le cas d'égalité de la conjecture de Bieberbach.

Définition 2.5. *On définit la fonction de Koebe sur \mathbb{D} par $k : z \mapsto \frac{z}{(1-z)^2}$.*

On remarque que l'on peut écrire la fonction de Koebe de plusieurs manières. En effet, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = z \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \right) = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots$$

Ceci est justifié par le fait que la fonction $\phi : z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est développable en série entière sur \mathbb{D} et comme elle est holomorphe sur \mathbb{D} , le développement en

série entière de $\phi'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right)$ correspond à la dérivation terme à terme du développement de ϕ .

Ainsi la fonction de Koebe peut s'écrire comme la somme d'une série entière qui converge sur \mathbb{D} .

2.2 Propriétés de la fonction de Koebe

Lemme 2.6. *Pour tout $z \in \mathbb{D}$ on a $k(z) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$.*

Démonstration. Partons du membre de droite de l'égalité que nous voulons établir. Soit $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right] &= \frac{1}{4} \left(\frac{(1+z)^2 - (1-z)^2}{(1-z)^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1+2z+z^2 - (1-2z+z^2)}{(1-z)^2} \right) \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \\ &= k(z). \end{aligned}$$

□

Proposition 2.7. *La fonction de Koebe peut s'écrire comme la composée des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} s : \mathbb{D} &\longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \\ z &\longmapsto \frac{1+z}{1-z} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t : \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ s &\longmapsto s^2 ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus]-\infty; -\frac{1}{4}] \\ t &\longmapsto \frac{1}{4}(t-1). \end{aligned}$$

On a alors $k = w \circ t \circ s$. De plus k est injective.

Démonstration. On déduit du lemme 2.6 que $k = w \circ t \circ s$. Etudions à présent les différentes fonctions définies dans la proposition.

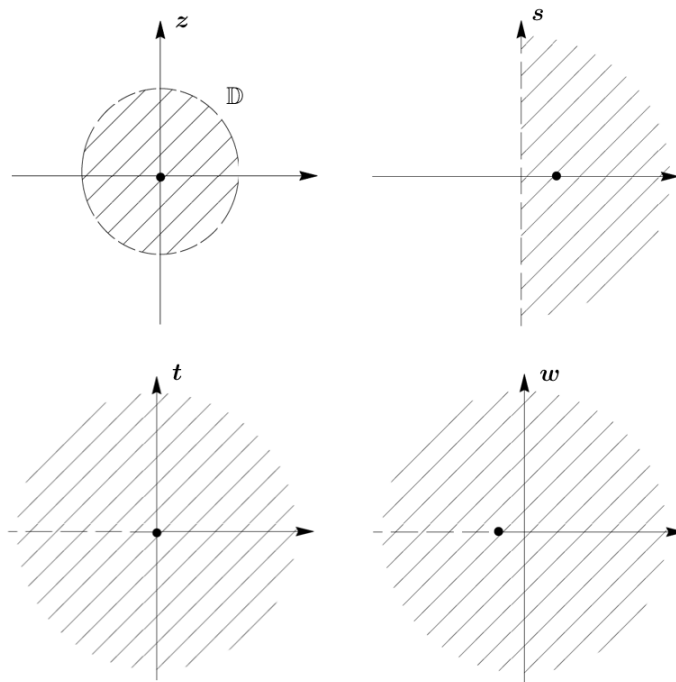


FIGURE 1 – Fonction de Koebe

- Montrons que s est bien définie. Soit $z \in \mathbb{D}$.

$$s(z) = \frac{1+z}{1-z} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} + 2i \frac{\Im(z)}{1+|z|^2}.$$

Comme $z \in \mathbb{D}$, alors $|z|^2 < 1$ autrement dit $\Re(z) > 0$. Donc s est bien définie.

- Soit $w \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ tel que $s(z) = w$. Alors :

$$\frac{1+z}{1-z} = w$$

donc $z = \frac{w-1}{w+1} \in \mathbb{D}$

Donc s est bijective de bijection réciproque $s^{-1} : w \mapsto \frac{w-1}{w+1}$.

En particulier s est bien injective sur \mathbb{D} .

- Montrons que t est bien définie. Soit $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$.
On peut écrire $s = \Re(s) + i \Im(s)$ avec $\Re(s) > 0$.
Ainsi $s^2 = \Re^2(s) + \Im^2(s) + 2i \Re^2(s)\Im^2(s)$.
On a alors $\Re(s^2) = \Re^2(s) + \Im^2(s) \geq \Re^2(s) > 0$.

On en déduit que pour tout $s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$, $t(s) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ i.e. t est bien définie.

- Montrons que t est injective. Soit $r, s \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$ tels que $t(r) = t(s)$.
Alors $s^2 = r^2$ donc soit $s = r$ soit $s = -r$. Mais le second cas $s = -r$ est impossible car on aurait $\Re(r) = -\Re(s)$ ce qui contredit le fait que $\Re(r) > 0$ et $\Re(s) > 0$.
Donc dans tous les cas $r = s$ et t est injective.
- En fait t définit une bijection. En effet, si on considère $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ alors il existe $\theta \in]-\pi; \pi[$ et $r > 0$ tels que $u = re^{i\theta}$. On pose $s = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et on a alors $u = s^2$ donc t est surjective et par conséquent bijective.
- Montrons que w est bien définie.
Soit $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ alors $\frac{t-1}{4} \in \mathbb{C} \setminus]-\infty; -\frac{1}{4}]$ et t est bien définie.
- Par ailleurs pour tout $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ on a $w(t) = \frac{1}{4}(t-1)$. Il s'agit d'une application affine, elle est donc bijective de bijection réciproque $w^{-1}(u) = 4u + 1$.

Donc $k = w \circ t \circ s$ est injective comme composée de fonctions injectives.

Donc la fonction de Koebe k réalise une bijection entre \mathbb{D} et $\mathbb{C} \setminus]-\infty; -\frac{1}{4}]$. \square

Remarque 2.8. Comme l'holomorphie est préservée à chaque étape, on s'autorise dans la proposition précédente à écrire s et t comme variables et fonctions.

Proposition 2.9. La fonction de Koebe – à rotation près – k est l'unique \mathcal{S} -fonction qui vérifie le cas d'égalité dans la conjecture de Bieberbach. Autrement dit, à rotation près, k est l'unique \mathcal{S} -fonction telle que $\forall n \geq 2, |a_n| = n$.

Définition 2.10. Soit $f \in \mathcal{S}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle rotation de f la fonction f_α telle que :

$$\forall z \in \mathbb{D}, f_\alpha(z) = e^{-i\alpha} f(e^{i\alpha} z).$$

Remarque 2.11. On dit f_α est une rotation de la fonction f car la transformation $z \mapsto e^{i\alpha} z$ est une rotation du plan complexe \mathbb{C} dans le sens trigonométrique d'un angle α .

Autrement dit, si $f \in \mathcal{S}$ que l'on écrit sous la forme :

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Alors

$$\forall z \in \mathbb{D}, f_\alpha(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

où $b_n = a_n e^{i(n-1)\alpha}$. On a donc $|b_n| = |a_n|$ car $|e^{i\alpha}| = 1$. La proposition 2.9 est donc tout à fait cohérente car si la fonction de Koebe k vérifie le cas d'égalité de la conjecture de Bieberbach alors ses rotations la satisfont également.

3 Cas particuliers des coefficients réels

Avant de démontrer la conjecture de Bieberbach dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, commençons par montrer que la conjecture de Bieberbach est vraie dans un cas plus faible : lorsque tous les coefficients sont réels.

Proposition 3.1. *Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que $\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. On suppose que pour tout $n \geq 2, a_n \in \mathbb{R}$. Alors $\forall n \geq 2, |a_n| \leq n$.*

Lemme 3.2. *Soit $f \in \mathcal{S}$, telle que tous ses coefficients de Taylor sont réels. Alors $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Comme $f \in \mathcal{S}$ on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc on pose $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}$ donc $n \in \mathbb{N}, a_n = \overline{a_n}$. Ainsi

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{z}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n z^n} = \overline{f(z)}.$$

Donc $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

On a une symétrie par rapport à l'axe des abscisses du domaine $f(\mathbb{D})$.

\Leftarrow Supposons que $z \in \mathbb{R}$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{R}$, il est évident que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{R}$.

\Rightarrow Supposons que $f(z) \in \mathbb{R}$. On a donc $f(z) = \overline{f(z)}$. Or on a déjà montré que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. On en déduit que $f(\bar{z}) = f(z)$.

Mais f est injective donc on a alors que $z = \bar{z}$. Autrement dit $z \in \mathbb{R}$. \square

Proposition 3.3. *Soit $f \in \mathcal{S}$ telle que tous ses coefficients sont réels. Si pour tout $z \in \mathbb{D}$ tel que $\Im(z) > 0$ (respectivement $\Im(z) < 0$) alors $\Im(f(z)) > 0$ (respectivement $\Im(f(z)) < 0$).*

Autrement dit, f envoie la partie supérieure (respectivement inférieure) de \mathbb{D} sur la partie supérieure (respectivement inférieure) de $f(\mathbb{D})$.

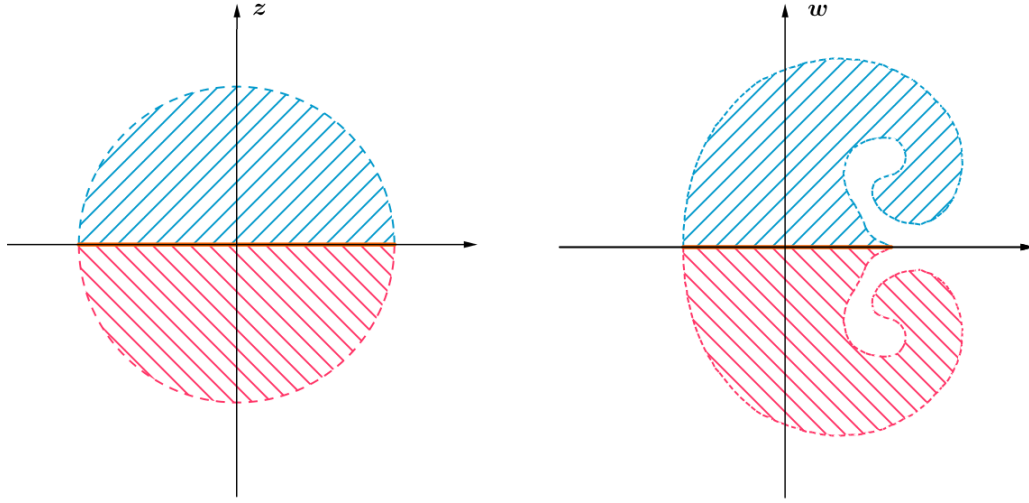


FIGURE 2 – Cas des coefficients réels

Démonstration. Notons $\mathbb{D}^+ = \{z \in \mathbb{D} \mid \Im(z) > 0\}$. On raisonne par l'absurde, supposons qu'il existe $z \in \mathbb{D}^+$ tel que $\Im(f(z)) \leq 0$.

On sait que $f'(0) = 1$ donc $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1 > 0$.

On considère donc une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x_n < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (i x_n) = 0$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(i x_n)}{i x_n} = 1 > 0$. On peut donc écrire

$$f(i x_n) = i x_n(1 + o(1)).$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \Im(f(i x_n)) > 0$.

Ceci justifie l'existence d'un élément $w \in \mathbb{D}^+$ tel que $\Im(f(w)) > 0$.

On a donc deux éléments : $z \in \mathbb{D}^+$ tel que $\Im(f(z)) < 0$ et $w \in \mathbb{D}^+$ tel que $\Im(f(w)) > 0$.

On considère γ_0 le chemin sur \mathbb{D}^+ entre z et w et γ_1 le chemin défini comme l'image par f de γ_0 : $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$. D'après le lemme 3.2, il existe $u \in f(\mathbb{D})$ sur le chemin γ_1 tel que $\Im(u) = 0$ et pour lequel $\Im(f^{-1}(u)) = 0$.

Ainsi il existe $v := f^{-1}(u)$ point de γ_0 tel que $\Im(v) = 0$. Ce qui est absurde.

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{D}$ tel que $\Im(z) > 0$, alors on a $\Im(f(z)) > 0$. □

Remarque 3.4. Comme f est une fonction injective, elle est bijective sur son image. Il est donc tout à fait légitime de parler d'un point $f^{-1}(z)$ pour $z \in \mathbb{D}$.

Lemme 3.5. Soit $m, n \in \mathbb{N}$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) \sin(mt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n; \\ \pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du fait que $(e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi], dt)$. \square

Remarque 3.6. On peut montrer de la même manière que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \sin(mt) dt = 0$$

Lemme 3.7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\alpha \in [0, \pi]$, on a

$$|\sin(n\alpha)| \leq n \sin(\alpha).$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- $n = 0$: Comme $\alpha \in [0, \pi]$, $\sin(\alpha) \geq 0 = |\sin(0 \cdot \alpha)|$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n , montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$. On a $\sin((n + 1)\alpha) = \cos(n\alpha) \sin(\alpha) + \sin(n\alpha) \cos(\alpha)$

Donc

$$|\sin((n + 1)\alpha)| \leq |\cos(n\alpha)| |\sin(\alpha)| + |\sin(n\alpha)| |\cos(\alpha)|.$$

Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq 1$ et $|\cos(x)| \leq 1$, on en déduit que :

$$|\sin((n + 1)\alpha)| \leq |\sin(\alpha)| + |\sin(n\alpha)|$$

Or $\alpha \in [0, \pi]$ donc $\sin(\alpha) \geq 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} |\sin((n + 1)\alpha)| &\leq \sin(\alpha) + |\sin(n\alpha)| \\ &\leq \sin(\alpha) + n \sin(\alpha) && \text{par H.R.} \\ &\leq (n + 1) \sin(\alpha) \end{aligned}$$

On a donc la conclusion par récurrence. \square

Il nous reste alors à montrer la proposition 3.1

Démonstration de la Proposition 3.1. Soit $z \in \mathbb{D}$. On écrit $z = \rho e^{i\theta}$. On a

$$f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\theta)$$

Notons $B(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rho^n \sin(n\theta)$ On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta) \, d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \sin(k\theta) \, d\theta \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho^k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(k\theta) \, d\theta \\ &= \pi a_n \rho^n \quad \text{d'après le lemme 3.5} \end{aligned}$$

On justifie l'interversion série-intégrale par le fait qu'on a convergence normale sur le disque $\overline{D}(0, R)$ pour tout $0 < R < 1$.

On a donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta) \, d\theta = \pi a_n \rho^n \quad (1)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |a_n \rho^n| &= \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta) \, d\theta \right| \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta) \, d\theta \right| \end{aligned}$$

car $\theta \mapsto \sin(n\theta)$ et $\theta \mapsto B(\rho e^{i\theta})$ sont impaires donc $\theta \mapsto \sin(n\theta) B(\rho e^{i\theta})$ est paire.
D'où

$$\begin{aligned} |a_n \rho^n| &\leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta) \, d\theta \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |B(\rho e^{i\theta}) \sin(n\theta)| \, d\theta \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} B(\rho e^{i\theta}) |\sin(n\theta)| \, d\theta \end{aligned}$$

car pour $\theta \in [0, \pi]$, $\sin(\theta) \geq 0$ et donc $B(\rho e^{i\theta}) \geq 0$ sur $[0, \pi]$.

Donc

$$\begin{aligned}
|a_n \rho^n| &\leq \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi B(\rho e^{i\theta}) \sin(\theta) d\theta && \text{d'après le lemme 3.7} \\
&\leq \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^\pi B(\rho e^{i\theta}) \sin(\theta) d\theta \\
&\leq \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^\pi a_1 \rho \sin^2(\theta) d\theta && \text{d'après le lemme 3.5 et (1)} \\
&\leq n a_1 \rho && \text{d'après le lemme 3.5}
\end{aligned}$$

Comme $\rho < 1$ est arbitraire, on peut faire tendre $\rho \rightarrow 1$ et on obtient que $|a_n| \leq n a_1$. Mais comme $a_1 = 1$ on a dès lors que

$$|a_n| \leq n.$$

□

On a donc montré l'inégalité de la conjecture de Bieberbach (proposition 3.1) dans le cas où les coefficients de Taylor sont tous réels. Passons maintenant au cas général, c'est-à-dire lorsque les coefficients de Taylor sont complexes.

4 Le second coefficient

4.1 Théorème de Bieberbach

La première preuve concrète permettant d'attester la conjecture de Bieberbach est dans le cas où $n = 2$. Ce résultat – démontré en 1916 par Bieberbach lui-même – repose sur le théorème de l'aire démontré en 1914 par Gronwall. Introduisons d'abord un ensemble de fonctions nécessaires à la suite de l'étude.

Définition 4.1. On appelle Σ l'ensemble des fonctions analytiques et injectives sur $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ de la forme

$$g : z \mapsto z + b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$$

On appelle Σ - fonction, une fonction de Σ .

Remarque 4.2. On note au passage que les Σ -fonctions sont normalisées de sorte à avoir un pôle simple de résidu 1 en $+\infty$. De plus, on remarque que l'on a $\Delta = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.

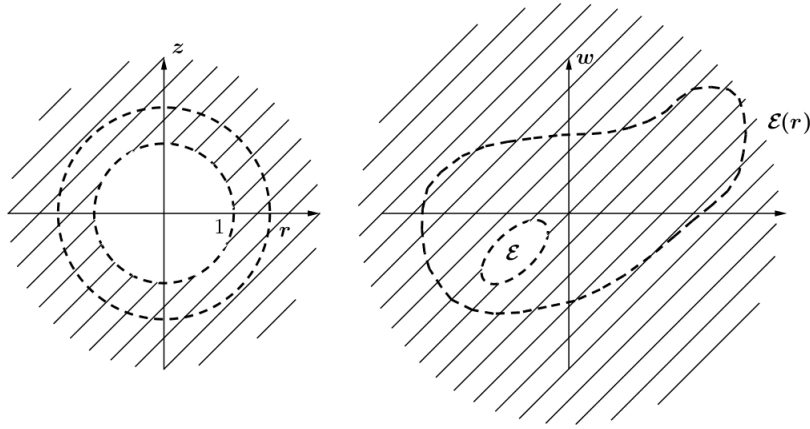


FIGURE 3 – \mathcal{E} , complémentaire de l'image de g

Théorème 4.3 (Théorème de l'aire). *Soit g une Σ -fonction telle que pour tout $z \in \Delta$, $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$. Alors :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n|^2 \leq 1$$

Démonstration. Soit $g \in \Sigma$. On introduit l'ensemble $\mathcal{E} = \mathbb{C} \setminus g(\Delta)$ comme le complémentaire sur \mathbb{C} de l'image de g par Δ .

Le but du théorème de l'aire est de calculer l'aire de l'ensemble \mathcal{E} en fonction des coefficients de Taylor de la fonction g , c'est-à-dire en fonction des b_n . Cependant en dépit du fait que \mathcal{E} soit mesurable, on n'a aucun contrôle sur \mathcal{E} , il peut être assez irrégulier et a priori l'image de g sur le bord de Δ n'est pas toujours bien définie.

C'est pour cette raison que l'on va approcher \mathcal{E} depuis l'extérieur par des ensembles réguliers.

Dès lors, pour tout $r > 1$, on définit l'ensemble $\mathcal{E}(r) = \mathbb{C} \setminus \{g(z) \mid |z| > r\}$.

Les ensembles $\mathcal{E}(r)$ sont mesurables pour tout $r > 1$. De plus, ils sont croissants lorsque r croît (comme on le voit sur la figure 3) : soit $r_0, r_1 > 1$ tels que $r_0 < r_1$ alors $\mathcal{E}(r_0) \subset \mathcal{E}(r_1)$. On peut donc écrire :

$$\mathcal{E} = \bigcup_{r>1} \uparrow \mathcal{E}(r)$$

Par conséquent,

$$\text{Aire}(\mathcal{E}) = \lim_{r \rightarrow 1^+} \text{Aire}(\mathcal{E}(r))$$

De plus, les ensembles $\mathcal{E}(r)$ sont délimités par un lacet simple lisse γ_r , on en

déduit qu'ils sont réguliers.

On introduit le lacet $\gamma_r : t \mapsto g(re^{it})$ qui correspond au contour de $\mathcal{E}(r)$, ce qui justifie la régularité de $\mathcal{E}(r)$. La paramétrisation de γ_r permet d'assurer la bonne orientation pour appliquer le théorème de Stokes.

Soit $z \in \Delta$. Alors on note $u \in \mathbb{C}$ la partie réelle de $g(z)$ et $v \in \mathbb{C}$ sa partie imaginaire. On peut donc écrire $g(z) = \Re(g(z)) + i \Im(g(z)) = u + i v$.

Soit $r > 1$. Alors :

$$\frac{1}{\pi} \text{Aire}(\mathcal{E}(r)) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathcal{E}(r)} du dv$$

On effectue le changement de variables $w = u + i v$. On a alors $dw = du + i dv$ et $d\bar{w} = du - i dv$.

Donc

$$\begin{aligned} dw \wedge d\bar{w} &= (du + i dv) \wedge (du - i dv) \\ &= i (du \wedge dv) - i (dv \wedge du) \\ &= 2i (du \wedge dv) \end{aligned}$$

car d'après le formalisme des formes différentielles de degré 2, on a de manière générale $dx \wedge dx = dy \wedge dy = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$ et $d(dx) = d(dy) = 0$.

Ainsi

$$\frac{1}{\pi} \text{Aire}(\mathcal{E}(r)) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathcal{E}(r)} d\bar{w} \wedge dw \quad (2)$$

Par le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\partial\mathcal{E}(r)} \bar{w} dw = \iint_{\mathcal{E}(r)} d(\bar{w} dw)$$

où $\partial\mathcal{E}(r)$ correspond au lacet γ_r .

De plus $d(\bar{w} dw) = d\bar{w} \wedge dw + \bar{w} \wedge d(dw) = d\bar{w} \wedge dw$ d'après le formalisme des formes différentielles de degré 2. On déduit donc de la formule du théorème de Stokes que :

$$\int_{\gamma_r} \bar{w} dw = \iint_{\mathcal{E}(r)} d\bar{w} \wedge dw$$

En reprenant (2), on a alors :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \text{Aire}(\mathcal{E}(r)) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \bar{w} dw \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \overline{g(z)} g'(z) dz\end{aligned}$$

car on rappelle que $w = g(z)$ donc cette égalité vient juste de l'intégration le long d'un chemin.

On effectue le changement de variables $z = r e^{it}$ le long du cercle $\mathcal{C}(0, r)$.

On rappelle de plus que $\forall z \in \Delta$, $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ donc

$$g(r e^{it}) = r e^{it} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-n} e^{-int}$$

et

$$g'(r e^{it}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-n-1} e^{-i(n-1)t}$$

Donc en combinant tous ces résultats, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \text{Aire}(\mathcal{E}(r)) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} r i e^{it} \overline{g(r e^{it})} g'(r e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r e^{it} \left(r e^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n r^{-n} e^{int} \right) \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-n-1} e^{-i(n-1)t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(r e^{-it} + \sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n r^{-n} e^{int} \right) \left(r e^{it} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-n} e^{-int} \right) dt\end{aligned}$$

On remarque de plus que g peut être vue comme une série de Laurent sur Δ (très lacunaire pour \mathbb{N}), elle converge normalement sur tout compact de Δ : on peut donc faire l'interversion entre série et intégrale.

De plus comme on l'a vu dans le lemme 3.5, $(e^{int})_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille hilbertienne de $L^2([0, 2\pi], dt)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \text{Aire}(\mathcal{E}(r)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} n \bar{b}_n r^{-n} e^{int} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n b_n r^{-n} e^{-int} \right) dt \\ &= r^2 - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 r^{-2n}. \end{aligned}$$

Comme $\text{Aire}(\mathcal{E}(r)) > 0$ par définition, on en déduit que

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{n=1}^m n^2 |b_n|^2 r^{-2n} \leq r^2.$$

Ainsi, on en déduit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 = \sup_{r < 1} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_n|^2 r^{-2n} \leq \sup_{r < 1} r^2 = 1.$$

□

Remarque 4.4. On peut montrer que pour tout $r > 1$, l'ensemble $\mathcal{E}(r)$ défini dans la démonstration est un domaine borné.

En effet, γ_r est une courbe simple par injectivité de g , lisse et fermée. Par le théorème de Jordan, on en déduit que γ_r sépare le plan complexe en deux composantes connexes : une bornée et une non bornée. Or, on sait que g admet un pôle simple en $+\infty$ donc :

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} g(z) = +\infty$$

Mais comme $\{g(z) \mid \forall A \in]1, +\infty[, |z| > A\} \subset \{g(z) \mid |z| > r\}$, on déduit du théorème de Jordan que $\{g(z) \mid |z| > r\}$ n'est pas borné et donc que l'autre composante connexe $\mathcal{E}(r) = \mathbb{C} \setminus \{g(z) \mid |z| > r\}$ est bornée.

Corollaire 4.5. Si $g \in \Sigma$ tel que $\forall z \in \Delta, g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$, alors $|b_1| \leq 1$. De plus, il y a égalité si et seulement si g est de la forme $g: z \mapsto z + b_0 + \frac{e^{i\alpha}}{z}$ (où $|e^{i\alpha}| = 1$).

Démonstration. L'inégalité provient directement du théorème de l'aire car on a montré que

$$\forall m \geq 1, \quad \sum_{n=1}^m n^2 |b_n|^2 \leq 1$$

En particulier, pour $m = 1$, on a $|b_1| \leq 1$.

Supposons à présent que $g(z) = z + b_0 + \frac{e^{i\alpha}}{z}$. Il est dès lors évident que $|b_1| = |e^{i\alpha}| = 1$.

Réciproquement, supposons que $|b_1| = 1$. Par le théorème de l'aire on sait que pour tout $m \geq 1$, $\sum_{n=1}^m n^2 |b_n|^2 \leq 1$ donc

$$\forall m \geq 2, \quad \sum_{n=2}^m n^2 |b_n|^2 \leq 0$$

mais pour tout $n \geq 2$, $n |b_n|^2 \geq 0$ on en déduit que pour tout $m \geq 2$, $b_m = 0$. Donc $\forall z \in \Delta$, $g(z) = z + b_0 + \frac{b_1}{z}$ avec $|b_1| = 1$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $b_1 = e^{i\alpha}$ ce qui donne le résultat attendu. \square

Théorème 4.6 (Théorème de Bieberbach). *Soit f une \mathcal{S} -fonction telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ alors $|a_2| \leq 2$. De plus il y a égalité si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

Démonstration. Le principe de la démonstration est le suivant : à partir d'une \mathcal{S} -fonction, on construit une Σ -fonction pour appliquer le théorème de l'aire, avant de réinterpréter l'inégalité obtenue pour la fonction initiale. On va donc voir un lien entre les \mathcal{S} -fonctions et les Σ -fonctions.

Soit $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $z \in \mathbb{D}$, on écrit $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z^2) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n}$$

On aimerait prendre la racine carrée de $f(z^2)$ pour $z \in \mathbb{D}$ mais le passage à la racine carrée nécessite de prendre quelques précautions car il faut être sûr que l'on obtienne encore une fonction holomorphe.

Pour ce faire, on va appliquer le théorème suivant :

Théorème 4.7. *Soit $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe. Toute fonction $f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ne s'annulant pas admet une racine carrée holomorphe.*

Or $f(0) = 0$, on ne peut donc pas appliquer ce résultat directement. Toutefois, comme f est injective on note que 0 est le seul point où f s'annule.

Soit $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z^2) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n} = z^2 \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n-2} \right).$$

On pose alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$u(z) := 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{2n-2}.$$

La fonction u ne s'annule pas sur \mathbb{D} simplement connexe, d'après le théorème 4.7, elle admet donc une racine carrée notée v .

Plus précisément, en choisissant $v(0) = 1$, la fonction v est holomorphe sur \mathbb{D} , et

$$\forall z \in \mathbb{D}, v(z) = \exp\left(\int_0^z \frac{1}{2} \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta\right)$$

On a bien $v^2 = u$. On peut donc poser pour tout $z \in \mathbb{D}$, $g(z) = z v(z)$. La fonction g est bien définie et on a $g^2 = f$. Montrons que g est injective.

Soit $z, w \in \mathbb{D}$, tels que $g(z) = g(w)$.

On alors $g^2(z) = g^2(w)$ donc $f(z^2) = f(w^2)$. Comme f est injective, on en déduit que $z^2 = w^2$ donc $z = w$ ou $z = -w$.

Supposons que $z = -w$.

Notons l la détermination principale du logarithme considérée précédemment.

On a alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$l(z) = \int_0^z \frac{u'(\zeta)}{u(\zeta)} d\zeta$$

On effectue le changement de variable $\zeta = \xi z$ et donc $d\zeta = z d\xi$. D'où

$$l(z) = \int_0^1 \frac{u'(z\xi) z}{u(z\xi)} d\xi \quad \text{et} \quad l(-z) = \int_0^1 \frac{u'(-z\xi) (-z)}{u(-z\xi)} dx\xi$$

Or par définition de u , on voit que u est paire et donc que u' est impaire. On en déduit que $l(z) = l(-z)$.

$$\text{Ainsi } g(w) = w \exp\left(\frac{1}{2} l(w)\right) = -z \exp\left(\frac{1}{2} l(-z)\right) = -g(z).$$

Mais on avait considéré z et w tels que $g(z) = g(w)$ on en déduit donc que $g(z) = g(w) = 0$ c'est-à-dire $f(w^2) = f(z^2) = 0$. Ainsi par injectivité de f , on a $w = z = 0$.

Ainsi dans tous les cas, $w = z$. Donc g est bien injective.

En particulier, $g(z) = 0$ si et seulement si $z = 0$.

On pose alors $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $h(z) := \frac{1}{g(1/z)}$.

Or on rappelle que l'on a posé pour tout $z \in \mathbb{D}$, $g(z) = z \exp\left(\frac{1}{2} l(z)\right)$. On a montré que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $l(z) = l(-z)$ donc l est paire et par conséquent g est impaire.

Il existe donc λ tel que

$$\forall w \in \mathbb{D}, g(w) = w + \lambda w^3 + \dots$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \setminus \{0\}$, $g\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w} \left(1 + \frac{\lambda}{w^2} + \dots\right)$.

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $h(w) = w \left(1 - \frac{\lambda}{w^2} + \dots\right)$.

Or on sait que pour tout $w \in \mathbb{D}$, $g(w)^2 = f(w^2)$.

Donc pour tout $w \in \mathbb{D}$, $g(w)^2 = w^2 + 2\lambda w^4 + \dots$

De plus, pour tout $w \in \mathbb{D}$, $f(w^2) = w^2 + a_2 w^4 + \dots$

On en déduit que $\lambda = \frac{a_2}{2}$.

Donc

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, h(w) = w - \frac{a_2}{2w} + \dots$$

Donc h est une Σ -fonction. Par le corollaire du théorème de l'aire, on en déduit que $\left|\frac{a_2}{2}\right| \leq 2$, autrement dit : $|a_2| \leq 4$.

Il nous reste à montrer le cas d'égalité.

D'après le corollaire du théorème de l'aire on sait qu'il y a égalité si et seulement si pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $h(z) = z + \frac{b}{z}$ avec $|b| = 1$ car $g(0) = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, h(z) = z + \frac{b}{z} &\iff \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, g\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z + \frac{b}{z}} \\ &\iff \forall z \in \mathbb{D}, g(z) = \frac{z}{1 + b z^2} \\ &\iff \forall z \in \mathbb{D}, f(z^2) = \frac{z^2}{(1 + b z^2)^2} \\ &\iff \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = \frac{z}{(1 + b z)^2} \\ &\iff \forall z \in \mathbb{D}, f(z) = (-b)^{-1} k(-b z) \end{aligned}$$

Autrement dit, il y a égalité dans l'inégalité du théorème de Bieberbach si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe. \square

Remarque 4.8. Dans la preuve du théorème de Bieberbach, à partir de $f \in \mathcal{S}$, on a introduit deux fonctions auxiliaires telles que $\forall z \in \mathbb{D}$, $g(z) := (f(z^2))^{1/2}$ puis $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $h(z) := \frac{1}{g(1/z)}$ pour avoir $h \in \Sigma$.

Cependant quel est l'intérêt de la fonction g et cette motivation du passage au

carré ? Ne pourrait-on pas seulement poser une fonction telle que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, $h_1 := \frac{1}{f(1/z)}$? Voyons ce que l'on obtient.

$$\forall z \in \mathbb{D}, f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}}\right)$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, h_1(z) &= z \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}}\right)^{-1} \\ &= z \left(1 - \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}}\right) + \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n-1}}\right)^2 + \dots\right) \\ &= z - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{z} + \dots \end{aligned}$$

Donc par le corollaire du théorème de l'aire, on aurait que $|a_2^2 - a_3| \leq 1$. Ce qui ne semble pas très concluant pour avoir une borne sur le coefficient a_2 .

Toutefois, si on prend aussi en compte le fait que $|a_2| \leq 2$ alors on peut en déduire une borne sur a_3 :

$$|a_3| \leq |a_2^2 - a_3| + |a_2|^2 \leq 1 + 4 = 5$$

mais cette borne n'est pas celle que l'on veut. On verra dans la prochaine section la méthode utilisée pour montrer la borne attendue sur a_3 .

4.2 Conséquences du théorème de Bieberbach

On va à présent voir plusieurs conséquences intéressantes du théorème de Bieberbach.

Théorème 4.9 (Théorème du quart de Koebe). *Soit $f \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$. Soit $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 \notin f(\mathbb{D})$. Alors $|w_0| \geq \frac{1}{4}$, autrement dit $\mathcal{D}(0, \frac{1}{4}) \subset f(\mathbb{D})$. De plus, $|w_0| = \frac{1}{4}$ si et seulement si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

Remarque 4.10. *L'existence de $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 \notin f(\mathbb{D})$ repose sur le théorème de Liouville selon lequel toute fonction holomorphe et bornée sur \mathbb{C}*

est constante.

Démonstration. Supposons qu'il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que $w_0 \notin f(\mathbb{D})$. Comme $f(0) = 0$ on sait que $w_0 \neq 0$.

On définit la fonction

$$h : \mathbb{C} \setminus \{w_0\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ w \longmapsto \frac{w_0 w}{w_0 - w} ;$$

h est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ comme composée de fonctions holomorphes dont le dénominateur ne s'annule pas.

Montrons que h est injective. Soit $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{w_0\}$ tels que $h(w) = h(z)$. Montrons que $w = z$.

On a alors

$$\frac{w_0 w}{w_0 - w} = \frac{w_0 z}{w_0 - z} \\ w_0 w (w_0 - z) = w_0 z (w_0 - w) \\ w_0^2 w = w_0^2 z$$

Mais comme $w_0 \neq 0$, on en déduit que $w = z$ et h est injective. Ainsi la fonction

$$g : z \longmapsto h \circ f(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)}$$

est injective car f et h le sont. De plus, g est holomorphe comme composée de fonctions holomorphes.

Montrons à présent que $g \in \mathcal{S}$. Comme on sait déjà que g est injective, il suffit de montrer que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

- On a $g(0) = h \circ f(0) = h(0) = 0$.
- $h'(0) = f'(0) h' \circ f(0) = h'(0)$ car $f \in \mathcal{S}$. La fonction h étant dérivable, on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h'(z) = \frac{w_0 (w_0 - z) - w_0 z (-1)}{(w_0 - z)^2} = \frac{w_0^2}{(w_0 - z)^2}$$

Donc $g'(0) = h'(0) = 1$. Ainsi $g \in \mathcal{S}$.

On sait que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ et comme on vient de montrer que $g \in \mathcal{S}$, alors pour tout $z \in \mathbb{D}$, on peut écrire $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$.

Calculons b_2 , c'est-à-dire calculons $g''(0)$.

Soit $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$\begin{aligned} g'(z) &= \frac{w_0 f'(z)(w_0 - f(z)) + w_0 f(z) f'(z)}{(w_0 - f(z))^2} \\ &= \frac{w_0^2 f'(z)}{(w_0 - f(z))^2} ; \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} g''(z) &= \frac{w_0^2 f''(z)(w_0 - f(z))^2 + 2w_0^2 f'(z)(w_0 - f(z))f'(z)}{(w_0 - f(z))^4} \\ &= \frac{w_0^2 f''(z)(w_0 - f(z)) + 2w_0^2 (f'(z))^2}{(w_0 - f(z))^3}. \end{aligned}$$

On sait que $f''(0) = 2a_2$, on en déduit que : $g''(0) = \frac{2(w_0 a_2 + 1)}{w_0} = 2\left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right)$.

Or $g''(0) = 2b_2$. Donc $b_2 = a_2 + \frac{1}{w_0}$. De ce fait,

$$\forall z \in \mathbb{D}, g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0}\right) z^2 + \dots$$

Comme $g \in \mathcal{S}$, par le théorème de Bieberbach (théorème 4.6), on en déduit que

$$\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| \leq 2$$

De plus, par le théorème de Bieberbach appliqué à $f \in \mathcal{S}$, on a aussi que

$$|a_2| \leq 2 \tag{3}$$

Par inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| - |a_2| \leq \left| |a_2| - \left|\frac{1}{w_0}\right| \right| \leq \left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| \leq 2$$

Autrement dit,

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| \leq |a_2| + 2 \tag{4}$$

On déduit de (3) que $|w_0| \geq \frac{1}{4}$

Il nous reste à traiter le cas d'égalité. Supposons que $|w_0| = \frac{1}{4}$.

En reprenant (4) on en déduit que $|a_2| \geq 2$. Or par le théorème de Bieberbach appliqué à f , on sait que $|a_2| \leq 2$. Ainsi, on a $|a_2| = 2$ donc f est une rotation de la fonction de Koebe par le cas d'égalité du théorème de Bieberbach.

Réciproquement, supposons que f est une rotation d'angle α de la fonction de Koebe. On a vu précédemment que l'on peut réécrire la rotation d'angle α de la fonction de Koebe sous la forme $k_\alpha: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} \setminus]-\infty; -\frac{1}{4}e^{-i\alpha}]$.

Il existe donc bien w_0 tel que $|w_0| = \frac{1}{4}$. Par exemple $w_0 = \frac{-1}{4}e^{-i\alpha}$. \square

Remarque 4.11. *On peut se demander pourquoi nous avons introduit cette fonction $h: w \mapsto \frac{w_0 w}{w_0 - w}$ et non une autre fonction. Le théorème du quart de Koebe fait l'hypothèse qu'il existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z) \neq w_0$. On sait que $f \in \mathcal{S}$ mais on ne sait rien de plus sur l'image de f . Il nous faut donc une fonction h qui ne soit pas définie en w_0 afin que $h \circ f$ ne prenne jamais la valeur w_0 .*

Ainsi, le choix de l'homographie s'impose naturellement car c'est une fonction injective simple. En effet les automorphismes de la sphère de Riemann sont les homographies, c'est-à-dire les fonctions du type $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Ainsi l'homographie est le choix le plus simple pour la composition à gauche.

Posons donc $\forall z \in \mathbb{D}$, $h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ et $g(z) = h \circ f(z)$.

On va à présent utiliser les hypothèses pour déterminer les paramètres a, b, c et d . On veut avoir $g \in \mathcal{S}$ c'est-à-dire $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$.

- $g(0) = 0 = h \circ f(0) = h(0)$ mais $h(0) = \frac{b}{d}$ donc $b = 0$.
- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $h'(z) = \frac{ad}{(cz + d)^2}$ donc $h'(0) = \frac{a}{d}$. On veut avoir $g'(0) = 1$ donc $f'(0)h'(f(0)) = h'(0) = 1$, autrement dit $a = d$.
- On veut que $\forall z \in \mathbb{D}$, $f(z) \neq w_0$ donc h ne doit pas être définie en w_0 . Or $h(w_0) = \frac{aw_0}{cw_0 + a}$ donc h n'est pas définie en w_0 à condition que $c + w_0 a = 0$ autrement dit $\frac{a}{c} = -w_0$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h(z) = \frac{-w_0 z}{z - w_0} = \frac{w_0 z}{w_0 - z}$$

Et on remarque qu'il s'agit précisément de la fonction h définie précédemment.

Proposition 4.12. Soit $f \in \mathcal{S}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1 - |z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1 - |z|^2} \quad (5)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}$. Par le théorème de Bieberbach appliqué à f , on sait que $|a_2| \leq 2$ c'est-à-dire $|f''(0)| \leq 4$.

Cependant, le point clé de cette démonstration est que l'on peut faire une translation depuis l'origine vers $z_0 \in \mathbb{D}$ du théorème de Bieberbach en composant avec un automorphisme de \mathbb{D} .

Les automorphismes de \mathbb{D} sont les homographies de la forme $z \mapsto \lambda \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z}$ avec $|\lambda| = 1$ et $|\alpha| < 1$.

En utilisant le fait que l'on veuille que 0 soit envoyé sur $z_0 \in \mathbb{D}$, on en déduit que l'automorphisme A doit être de la forme :

$$\forall z \in \mathbb{D}, A(z) = \frac{z + z_0}{1 + z \bar{z}_0}$$

On a $A(0) = z_0$ et A est bijective de bijection réciproque $A^{-1} : z \mapsto \frac{z - z_0}{1 - z \bar{z}_0}$

On en déduit donc que $f \circ A$ est holomorphe injective. On la normalise afin d'obtenir une \mathcal{S} - fonction, en posant

$$\forall z \in \mathbb{D}, h(z) = \frac{f \circ A(z) - f(z_0)}{A'(0) f'(z_0)}$$

Or pour tout $z \in \mathbb{D}$, $A'(z) = \frac{1 - |z_0|^2}{(1 + z \bar{z}_0)^2}$ donc $A'(0) = 1 - |z_0|^2$.

Et pour tout $z \in \mathbb{D}$, $A''(z) = \frac{-(1 - |z_0|^2)(2\bar{z}_0)}{(1 + z \bar{z}_0)^3}$ donc $A''(0) = -2\bar{z}_0(1 - |z_0|^2)$.

Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{D}, h(z) = \frac{f \circ A(z) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2) f'(z_0)}$$

- h est bien définie car $|z_0| \leq 1$ et $f'(z_0) \neq 0$ car $f \in \mathcal{S}$.

- $h(0) = 0$ dû à la normalisation faite.
- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $h'(z) = \frac{f' \circ A(z)}{f'(z_0)(1+z\bar{z}_0)^2}$ donc $h'(0) = 1$.
- Et pour tout $z \in \mathbb{D}$, $h''(z) = \frac{A''(z)f'(A(z)) + (A'(z))^2 f''(A(z))}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$

Or $A''(0) = -2\bar{z}_0(1-|z_0|^2)$

Ainsi

$$h''(0) = -2\bar{z}_0 + \frac{(1-|z_0|^2)f''(z_0)}{f'(z_0)}$$

Ceci montre que l'on a bien $h \in \mathcal{S}$. En appliquant le théorème de Bieberbach h , on en déduit que $\left| \frac{h''(0)}{2} \right| \leq 2$. Ce qui permet d'arriver au résultat :

$$\forall z_0 \in \mathbb{D}, \left| z_0 \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{2|z_0|^2}{1-|z_0|^2} \right| \leq \frac{4|z_0|}{1-|z_0|^2}$$

□

Cette inégalité va permettre de montrer le théorème de Distorsion.

Théorème 4.13 (Théorème de Distorsion). *Soit $f \in \mathcal{S}$ et $z \in \mathbb{D}$. Alors :*

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \quad (6)$$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad (7)$$

Démonstration. Montrons l'inégalité (6). Soit $z \in \mathbb{D}$. On écrit $z = r e^{i\alpha}$.

En reprenant l'inégalité (5), on a :

$$\left| z \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{2|z|^2}{1-|z|^2} \right| \leq \frac{4|z|}{1-|z|^2}$$

Donc

$$\left| r e^{i\alpha} \frac{f''(r e^{i\alpha})}{f'(r e^{i\alpha})} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

La fonction f' ne s'annule pas sur \mathbb{D} simplement connexe, elle admet donc un logarithme.

On notera alors $\begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \log((1-|z|^2)f'(z)) \end{array}$ la somme du logarithme de

f' et de $z \mapsto \ln(1 - |z|^2)$ valant 0 en 0.

On a donc

$$\left| e^{i\alpha} \frac{f''(r e^{i\alpha})}{f'(r e^{i\alpha})} - \frac{2r}{1-r^2} \right| \leq \frac{4}{1-r^2}$$

soit

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} [\log((1-r^2) f'(r e^{i\alpha}))] \right| \leq \frac{4}{1-r^2}$$

On intègre sur ρ entre 0 et r :

$$\left| \int_0^r \frac{\partial}{\partial \rho} [\log((1-\rho^2) f'(\rho e^{i\alpha}))] d\rho \right| = |\log((1-r^2) f'(r e^{i\alpha}))|$$

car $f'(0) = 1$ et $\log(f'(0)) = 0$.

$$\begin{aligned} |\log((1-r^2) f'(r e^{i\alpha}))| &\leq \int_0^r \left| \frac{\partial}{\partial \rho} [\log((1-\rho^2) f'(\rho e^{i\alpha}))] \right| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{4}{1-\rho^2} d\rho \\ &= \int_0^r \left(\frac{2}{1-\rho} + \frac{2}{1+\rho} \right) d\rho \\ &= 2 \log \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \end{aligned}$$

On a donc

$$-2 \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right) \leq \log((1-|z|^2) |f'(z)|) \leq 2 \log \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right),$$

donc

$$\left(\frac{1-|z|}{1+|z|} \right)^2 \leq (1-|z|^2) |f'(z)| \leq \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \right)^2;$$

ainsi

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

On va à présent montrer l'inégalité (7) en deux temps.

- Montrons le membre de droite de l'inégalité. Soit $z \in \mathbb{D}$. On pose $z = r e^{i\alpha}$.

Par le théorème fondamental de l'intégration on a :

$$f(r e^{i\alpha}) = \int_0^r e^{i\alpha} f'(\rho e^{i\alpha}) d\rho$$

Donc

$$\begin{aligned} |f(r e^{i\alpha})| &\leq \int_0^r |f'(\rho e^{i\alpha})| d\rho \\ &\leq \int_0^r \frac{1+\rho}{(1-\rho)^3} d\rho \quad \text{d'après (5)} \\ &= \int_0^r \left(\frac{-1}{(1-\rho)^2} + \frac{2}{(1-\rho)^3} \right) d\rho \\ &= \left[\frac{-1}{1-\rho} + \frac{1}{(1-\rho)^2} \right]_0^r \\ &= \frac{r}{(1-r)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} ;$$

A noter que cette inégalité sera très utile pour la suite.

- Montrons à présent le membre de gauche de l'inégalité. Faisons une disjonction de cas :

1. Supposons que $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$. On définit la fonction

$$g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ r \longmapsto \frac{r}{(1+r)^2} ;$$

g est dérivable sur $[0, 1]$ et on a pour tout $r \in [0, 1]$,

$$g'(r) = \frac{1-r}{(1+r)^3} \geq 0$$

Donc g est croissante et positive sur $[0, 1]$.

Par ailleurs, $g(1) = \frac{1}{4}$ donc pour tout $r \in [0, 1]$, $g(r) \leq \frac{1}{4}$.

Ainsi pour tout $z \in \mathbb{D}$ tel que $|f(z)| \geq \frac{1}{4}$,

$$|f(z)| \geq \frac{1}{4} \geq g(|z|) = \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

2. Supposons que $|f(z)| < \frac{1}{4}$.

On considère γ un chemin choisi de telle manière à ce que $\gamma(0) = 0$, $\gamma(1) = z$ et tel que $(f' \circ \gamma) \gamma'$ soit d'argument constant α sur $[0, 1]$.

Le chemin $f \circ \gamma$ a pour extrémité 0 et l'argument de sa dérivée est constant, on en déduit que $f \circ \gamma$ parcourt le segment $[f \circ \gamma(0), f \circ \gamma(1)] = [0, f(z)]$, quitte à faire une reparamétrisation.

Ainsi on peut choisir pour tout $t \in [0, 1]$, $f \circ \gamma(t) = t f(z)$.

On tire de tout ce que l'on vient de dire que :

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (f \circ \gamma(t)) dt \\ &= \int_0^1 f'(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 |f'(\gamma(t)) \gamma'(t)| e^{i\alpha} dt \\ &= e^{i\alpha} \int_0^1 |f'(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|f(z)| = \int_0^1 |f'(\gamma(t)) \gamma'(t)| dt \quad (8)$$

Par ailleurs, d'après le théorème du quart de Koebe, on sait que $f(\mathbb{D})$ contient le disque $\mathcal{D}(0, \frac{1}{4})$ donc $f(\mathbb{D})$ contient tout le segment $[0, f(z)]$ car $|f(z)| \leq \frac{1}{4}$.

Si on considère le chemin $\gamma_z : t \in [0, 1] \mapsto f^{-1}(tf(z))$ alors $\gamma_z(0) = 0$ et $\gamma_z(1) = z$ car f étant injective, elle est bijective sur son image et $f \in \mathcal{S}$ donc $f^{-1}(0) = 0$. On en déduit

$$f(z) - f(0) = \int_{\gamma_z} df$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, $f(\gamma_z(t)) = t f(z)$ ainsi l'argument de $f(\gamma_z(t))$ et

donc celui de $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_z(t)) = f'(\gamma_z(t)) \gamma'_z(t)$ reste constant égal à $f'(z)$ pour $t \in [0, 1]$.

Intéressons nous à la fonction $t \in [0, 1] \mapsto |\gamma_z(t)|$. Elle est dérivable sur $]0, 1[$: on justifie la dérivabilité de cette fonction en 0 par le fait qu'au voisinage de 0, $\gamma_z(t)$ est essentiellement proportionnelle à t . Donc pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|^2) = 2 |\gamma_z(t)| \frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|).$$

Mais $|\gamma_z(t)|^2 = \gamma_z(t) \overline{\gamma_z(t)}$ donc on a aussi :

$$\frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|^2) = \frac{d}{dt} (\gamma_z(t) \overline{\gamma_z(t)}) = \gamma'_z(t) \overline{\gamma_z(t)} + \gamma_z(t) \overline{\gamma'_z(t)}.$$

Par définition de γ_z et par injectivité de f on a $\gamma_z(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Donc pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|) = \frac{1}{2} \left(\gamma'_z(t) \frac{\overline{\gamma_z(t)}}{|\gamma_z(t)|} + \overline{\gamma'_z(t)} \frac{\gamma_z(t)}{|\gamma_z(t)|} \right).$$

Donc pour tout $t \in]0, 1[$,

$$\left| \frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|) \right| \leq \frac{1}{2} (|\gamma'_z(t)| + |\overline{\gamma'_z(t)}|) = |\gamma'_z(t)|.$$

Ainsi en reprenant (8), on obtient :

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \int_0^1 |f'(\gamma_z(t))| |\gamma'_z(t)| dt \\ &\geq \int_0^1 |f'(\gamma_z(t))| \left| \frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|) \right| dt \\ &\geq \int_0^1 h(|\gamma_z(t)|) \left| \frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|) \right| dt \end{aligned}$$

où $h: z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3}$

Donc

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \int_0^1 h(|\gamma_z(t)|) \frac{d}{dt} (|\gamma_z(t)|) dt \\ &\geq [H(|\gamma_z(t)|)]_0^1 \end{aligned}$$

où H vérifie $H' = h$ par exemple, car on sait qu'une primitive est définie à une constante près. Donc pour tout $r \in [0, 1]$,

$$H(r) = \int_0^r \frac{1-\rho}{(1+\rho)^3} d\rho = \left[\frac{\rho}{(1+\rho)^2} \right]_0^r = \frac{r}{(1+r)^2}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq H(|z|) - H(|0|) \\ &\geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \end{aligned}$$

Dans tous les cas, pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$|f(z)| \geq \frac{|z|}{(1+|z|)^2}$$

□

Remarque 4.14. *Toutes les inégalités du théorème de Distorsion sont strictes sauf si f est une rotation de la fonction de Koebe.*

On va à présent appliquer le théorème de Distorsion (théorème 4.13) à la topologie de l'espace \mathcal{S} , ce qui permettra de justifier que les coefficients de Taylor a_n sont bornés pour tout $n \geq 2$.

Proposition 4.15. *\mathcal{S} est un sous ensemble compact de l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathbb{D} , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Démonstration. On considère la topologie de la convergence uniforme sur tout compact : une suite de fonctions analytiques sur \mathbb{D} , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction analytique f si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact \mathcal{K} de \mathbb{D} .

1. Montrons d'abord que \mathcal{S} est fermé. On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathcal{S})^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction f , analytique sur \mathbb{D} . Montrons que $f \in \mathcal{S}$.

Du théorème de Hurwitz (théorème 1.4), on déduit que f est soit une fonction constante, soit une fonction holomorphe injective sur \mathbb{D} .

Supposons que f est constante.

On a évidemment que $f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = 0$ car $f_n \in \mathcal{S}$ pour tout n .

Par ailleurs, d'après la formule de Cauchy on a $|f'(0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f'_n(0)| = 1$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{S}$.

Ceci contredit le fait que f soit constante. On en déduit que f est injective et donc $f \in \mathcal{S}$ puisque $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Donc \mathcal{S} est fermé.

2. Montrons que \mathcal{S} est localement borné, c'est-à-dire que pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathbb{D}$, il existe $C = C_{\mathcal{K}}$, tel que pour tout $f \in \mathcal{S}$,

$$\|f\|_{\mathcal{K}} \leq C_{\mathcal{K}}$$

Ceci résulte indirectement du théorème de Bieberbach. Soit $r \in [0, 1]$. On a montré dans le théorème de Distorsion que pour tout $f \in \mathcal{S}$, pour tout $|z| < r$,

$$|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

On en déduit que \mathcal{S} est uniformément borné sur tout disque $\mathcal{D}(0, r)$ et a fortiori sur tout compact de \mathbb{D} .

On déduit du théorème de Montel que \mathcal{S} est compact. □

Ainsi comme \mathcal{S} est compact, on a que pour tout $n \geq 2$, a_n est borné. Ce résultat est assez remarquable car nous avons seulement prouvé qu'on a une borne sur le coefficient a_2 et on peut alors en déduire une borne sur a_n pour tout $n \geq 2$.

On va dès lors donner plusieurs estimées potentielles de cette borne.

Proposition 4.16. *Soit $f \in \mathcal{S}$, alors pour tout $n \geq 2$, $|a_n| \leq \frac{n^2 e^2}{4}$.*

Démonstration. Par le théorème de Distorsion on a montré que pour tout $r \in [0, 1]$, pour tout $|z| < r$, $|f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$

En utilisant l'inégalité de Cauchy, on en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \frac{r}{(1-r)^2} = \frac{1}{r^{n-1} (1-r)^2}$$

On pose

$$\begin{aligned} \phi :]0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto \frac{1}{r^{n-1} (1-r)^2} ; \end{aligned}$$

ϕ est dérivable sur $]0, 1[$, et pour tout $r \in]0, 1[$,

$$\phi'(r) = \frac{(1-n)r^{-n}}{(1-r)^2} + \frac{2}{r^{n-1}(1-r)^3}$$

Donc

$$\begin{aligned} \phi'(r) = 0 &\iff (1-n)(1-r) + 2r = 0 \\ &\iff r_0 = \frac{n-1}{n+1} \end{aligned}$$

On a le tableau de variation suivant :

r	0	r_0	1
$\phi'(r)$	-	0	+
ϕ	$+\infty$	$\phi(r_0)$	$+\infty$

On a $\phi(r_0) = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^{n+1}}{4(n-1)^{n-1}}$

La fonction ϕ atteint son minimum en r_0 et pour tout $r \in]0, 1[$, $\phi'(r_0) \leq \phi(r)$.
On en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$|a_n| \leq \phi(r_0) = \frac{(n+1)^{n+1}}{4(n-1)^{n-1}} \tag{9}$$

On pose pour tout $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^2(n-1)^{n-1}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq$, on a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n-1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&= \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \\
&= \exp\left((n-1) \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left((n-1) \left(\frac{2}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)\right)\right) \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(2 + o(1)\right) \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^2$$

Par ailleurs on définit la fonction :

$$\begin{aligned}
\psi &:]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) ;
\end{aligned}$$

ψ est deux fois dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \frac{-2}{(x-1)^2} \frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{x^3} \frac{x^2}{x^2-1} \\
&= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - \frac{2}{x}
\end{aligned}$$

Et,

$$\psi''(x) = \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2} = \frac{-2}{x^2(x^2-1)} < 0.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
$\psi''(x)$	-	
ψ'	$+\infty$	0
ψ	$\psi(1)$	2

Ainsi ψ est croissante. De plus la fonction \exp est croissante. Donc $\exp \circ \psi$ est croissante.

Or pour tout $x > 1$,

$$\exp \circ \psi(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{(x+1)^{x+1}}{(x-1)^{x-1} x^2}$$

de sorte que pour tout $n \geq 2$, $u_n = f(n)$ en posant $f = \exp \circ \psi$.

On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $u_{n+1} \geq u_n$.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et elle converge vers e^2 .

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq e^2$ c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{(n+1)^{n+1}}{n^2 (n-1)^{n-1}} \leq e^2.$$

Autrement dit,

$$\forall n \geq 2, \quad \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-1)^{n-1}} \leq n^2 e^2.$$

En reprenant (9) on en déduit que pour tout $n \geq 2$, $|a_n| \leq \frac{n^2 e^2}{4}$. □

Mais on peut encore raffiner cette borne, avec l'estimée suivante.

Proposition 4.17. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, pour tout $n \geq 2$, $|a_n| \leq en$.*

Lemme 4.18. *Soit $r > 0$ et f une fonction holomorphe injective définie sur le disque $\mathcal{D}(0, r)$. On note \mathcal{A}_r l'aire du domaine $f(\mathcal{D}(0, r))$. Alors :*

$$\mathcal{A}_r = \int_0^{2\pi} \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho \, d\rho \, d\theta$$

Démonstration. f est une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}(0, r)$ à valeurs dans \mathbb{C} mais on peut la voir comme une fonction d'un sous ensemble de \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Pour $z \in \mathcal{D}(0, r)$, il existe $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $f(z) = u + i v$. Dès lors si on écrit $z = x + i y$ on peut alors voir f de la manière suivante $f: (x, y) \mapsto (u, v)$
Ainsi $f(x, y) = u(x, y) + i v(x, y)$. u et v représentent les fonctions coordonnées de f vues comme fonctions de $\mathcal{D}(0, r) \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$.

Si f est \mathbb{R} -différentiable au voisinage de z alors son jacobien \mathcal{J}_f est défini par $du \wedge dv = \mathcal{J}_f dx \wedge dy$. Ainsi :

$$du \wedge dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) \wedge \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} du \wedge dv &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy \\ &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} dx \wedge dy \end{aligned}$$

On rappelle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{cases}$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Ainsi on en déduit que :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases}$$

On a alors :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

D'où :

$$\mathcal{J}_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2$$

Comme f est holomorphe, par les conditions de Cauchy-Riemann on a : $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Donc :

$$\mathcal{J}_f = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 = |f'(z)|^2$$

Ainsi $du \wedge dv = |f'(z)|^2 dx \wedge dy$

De ce fait,

$$\mathcal{A}_r = \int_{f(\mathcal{D}(0,r))} du dv = \iint |f'(z)|^2 dx dy$$

où $z = x + iy$

On passe en coordonnées polaires en posant $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$

de sorte que $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

de déterminant égal à ρ donc $dx \wedge dy = \rho d\rho \wedge d\theta$

D'où

$$\mathcal{A}_r = \int_0^{2\pi} \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$$

□

Lemme 4.19. Soit $f \in \mathcal{S}$. Pour tout $0 < r < 1$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}$. On pose pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h(z) = f(z^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

Par le théorème de Distorsion, on sait que pour tout $|z| < r$,

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

Donc pour tout $|z| < r$, $|f(z^2)| \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$

c'est-à-dire pour tout $|z| < r$, $|h(z)| \leq \frac{r}{1-r^2}$

Donc h transforme le disque $\mathcal{D}(0, r)$ en un domaine $\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}\left(0, \frac{r}{1-r^2}\right)$.

Notons \mathcal{A}_r l'aire de \mathcal{D}_r . On a donc :

$$\mathcal{A}_r \leq \frac{\pi r^2}{(1-r^2)^2} \tag{10}$$

Mais d'après le lemme (4.18) on sait que

$$\mathcal{A}_r = \int_0^{2\pi} \int_0^r |h'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$$

Comme $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ on a $h'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}$
Donc pour tout $0 \leq \rho \leq r$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$h'(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n \rho^{n-1} e^{i\theta(n-1)}$$

Ainsi

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r |h'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \int_0^r h'(\rho e^{i\theta}) \overline{h'(\rho e^{i\theta})} \rho \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\sum_{n=1}^{\infty} n c_n \rho^{n-1} e^{i\theta(n-1)} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} m c_m \rho^{m-1} e^{-i\theta(m-1)} \right) \rho \, d\rho \, d\theta
\end{aligned}$$

Or comme $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{N}}$ forme une famille orthogonale et comme on a convergence normale sur $\mathcal{D}(0, R)$ pour tout $0 < R < 1$ on peut donc intervertir série et intégrale. Donc comme on l'a déjà vu dans la preuve du théorème de l'aire, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^r |h'(\rho e^{i\theta})|^2 \rho \, d\rho \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \rho^{2n-2} \, d\rho \, d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \left[\frac{\rho^{2n}}{2n} \right]_0^r \\
&= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{A}_r = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n} \tag{11}$$

En associant (10) et (11) on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n} \leq \frac{r^2}{(1-r^2)^2}$$

Donc

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2 r^{2n-1} \leq \frac{2r}{(1-r^2)^2}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et r - sachant que l'intervention série-intégrale est justifiée par la convergence normale sur $\mathcal{D}(0, r)$ - on obtient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} \leq \frac{r^2}{1-r^2}$$

Or pour les mêmes raisons que précédemment, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta &= \int_0^{2\pi} h(re^{i\theta}) \overline{h(re^{i\theta})} d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta} \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m r^m e^{-im\theta} \right) d\theta \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_n c_m r^{n-m} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(n-m)} d\theta \\
 &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq \frac{r^2}{1-r^2}$$

D'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r^2 e^{2i\theta})| d\theta \leq \frac{r^2}{1-r^2}$$

On procède au changement de variable $\theta' = 2\theta$ pour en déduire que

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} |f(r^2 e^{i\theta'})| d\theta' \leq \frac{r^2}{1-r^2}$$

Ce qui est donc équivalent à : pour tout $r \in [0, 1[$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r}$$

□

Démonstration de la proposition 4.17. Par les formules de Cauchy, on sait que pour tout $n \geq 2$,

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

En posant $z = r e^{i\alpha}$ on a $dz = r i e^{i\alpha} d\alpha$ donc

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\alpha}) r i e^{i\alpha}}{r^{n+1} e^{i\alpha(n+1)}} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\alpha})}{r^n e^{i n \alpha}} d\alpha$$

Donc

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\alpha})|}{r^n} d\alpha$$

En appliquant le lemme 4.19 on a :

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^{n-1}(1-r)}$$

On pose

$$\begin{aligned} \phi :]0, 1[&\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto \frac{1}{r^{n-1}(1-r)} \end{aligned}$$

ϕ est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $r \in]0, 1[$, on a :

$$\phi'(r) = \frac{(1-n)r^{-n}(1-r) + r^{-n+1}}{(1-r)^2}$$

On a $\phi'(r) = 0 \iff r = \frac{n-1}{n}$ donc ϕ admet un minimum en $r_0 = 1 - \frac{1}{n}$

Donc pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \phi\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ &= n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\leq n \exp\left((n-1) \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)\right) \\ &\leq n \exp\left((n-1) \frac{1}{n-1}\right) \end{aligned}$$

car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1+x) \leq x$

On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $|a_n| \leq en$ □

On peut encore améliorer cette estimée d'un facteur 2 grâce à un résultat démontré par Baernstein en 1974 : pour tout nombre réel p , pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$,

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |k(re^{i\theta})|^p d\theta$$

On ne démontrera pas ce résultat ici, mais il est possible d'en trouver une preuve dans l'ouvrage de Baernstein : [2].

On applique alors ce résultat pour $p = 1$, on en déduit que pour tout fonction $f \in \mathcal{S}$:

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r^2}$$

Commençons par démontrer un lemme qui sera utile pour la dernière estimée :

Lemme 4.20. *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \frac{n+1}{n+2} e$$

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} \chi &: [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x}{2} \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - 1 \end{aligned}$$

La fonction χ est deux fois dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a :

$$\chi'(x) = \frac{(x+1) \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - 2}{2x+2}$$

Et aussi,

$$\chi''(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2(x+2)} < 0.$$

On en déduit que χ' est croissante sur $[1, +\infty[$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
$\chi''(x)$	-	
χ'	0	
χ	0	

On en déduit que χ est croissante sur $[1, +\infty[$.

De plus comme $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$ et $\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) \sim \frac{-1}{x+2}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \chi(x) = 0$

En outre, pour tout $x \geq 1$, $f(x) < 0$,

c'est-à-dire pour tout $x \geq 1$, $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(\frac{x+1}{x+2}\right) e$ car \exp est croissante.

En particulier pour tout $n \geq 1$,

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(\frac{n+1}{n+2}\right) e.$$

□

On a alors l'estimée suivante :

Proposition 4.21. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, pour tout $n \geq 2$, $|a_n| \leq \frac{en}{2}$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}$. On utilise donc le résultat de Baernstein selon lequel :

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{r}{1-r^2}.$$

Par la formule de Cauchy, on en déduit alors que :

$$|a_n| \leq \frac{1}{r^n} \frac{r}{1-r^2} = \frac{1}{r^{n-1}(1-r^2)}.$$

On pose la fonction

$$\begin{aligned} \psi &:]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ r &\longmapsto \frac{1}{r^{n-1}(1-r^2)}. \end{aligned}$$

La fonction ψ est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $r \in]0, 1[$, on a :

$$\psi'(r) = \frac{(n-1)}{r^n(1-r^2)} + \frac{2}{r^{n-2}(1-r^2)^2}.$$

Autrement dit $\psi'(r_0) = 0$ si et seulement si $r_0^2 = \frac{n-1}{n+1}$.

Ainsi, la fonction ψ atteint son minimum en r_0 et pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 |a_n| &\leq \psi(r_0) \\
 &= \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+1}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\
 &= \frac{n+1}{2} \left(1 + \frac{2}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\
 &< \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{en}{n+1} \right) \\
 &= \frac{en}{2} ;
 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le lemme 4.20 pour conclure. □

5 La méthode de Loewner

La conjecture de Bieberbach dans le cas où $n = 3$ a été démontrée par Charles Loewner en 1923. Ce résultat repose principalement sur la densité d'une certaine classe de fonctions pour lesquelles il sera plus aisé de montrer la conjecture du fait de la géométrie simplifiée de leur image.

5.1 Définitions préliminaires

Dans le cadre de la résolution du troisième coefficient de la conjecture de Bieberbach, plusieurs résultats seront importants.

Tout d'abord, on va énoncer un corollaire du lemme de Schwarz :

Lemme 5.1. *Soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et $g: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ avec $g(0) = 0$. Alors :*

1. $|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2$.
2. $|g'(z)| \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$.

Démonstration. 1. On considère la fonction :

$$h(z) = \frac{z - f(0)}{1 - \overline{f(0)}z}$$

Alors $h \circ f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ et $h \circ f(0) = 0$.

Par le lemme de Schwarz (théorème 1.2), on a

$$|(h \circ f)'(0)| = |h'(f(0))| |f'(0)| = \left| \frac{1 - |f(0)|^2}{(1 - |f(0)|^2)^2} \right| |f'(0)| \leq 1 ;$$

c'est-à-dire

$$|f'(0)| \leq 1 - |f(0)|^2.$$

2. Soit $z_0 \in \mathbb{D}$. On considère à présent :

$$\tilde{h}(z) = \frac{z + z_0}{1 + z\bar{z}_0}$$

Alors $g \circ \tilde{h} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$. Par (1) on a : $\left| (g \circ \tilde{h})'(0) \right| \leq 1 - \left| (g \circ \tilde{h})(0) \right|^2$,
c'est-à-dire $|g'(z_0)| |1 - |z_0|^2| \leq 1 - |g(z_0)|^2$.

Autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|g'(z)| \leq \frac{1 - |g(z)|^2}{1 - |z|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}.$$

□

À présent, on va énoncer un lemme essentiel tout au long de la théorie des *chaîne de Loewner*, qui permet de majorer les coefficients de Taylor d'une certaine classe de fonctions holomorphes.

On note \mathcal{P} la classe des fonctions holomorphes P sur \mathbb{D} telle que $P(0) = 1$ et telle que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $\Re(P(z)) > 0$.

Lemme 5.2. Soit $P \in \mathcal{P}$. On écrit, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$P(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

Alors pour tout $n \geq 1$, $|c_n| \leq 2$.

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{P}$. Soit $0 < \rho < 1$. Par la formule de Cauchy, on a pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \int_0^{2\pi} P(\rho e^{i\theta}) \rho^{-n} e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

En faisant tendre ρ vers 1 et obtenir que pour tout $n \geq 1$,

$$c_n = \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (12)$$

Comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ converge normalement sur les compacts de \mathbb{D} , on

a pour tout $0 < r < 1$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} P(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2i\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \int_{|z|=r} z^{k+n-1} dz$$

Or pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\int_{|z|=r} z^k dz = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } k = -1 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} P(z) z^{n-1} dz = 0.$$

Donc en utilisant le même argument que celui pour obtenir (12), on obtient, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{in\theta} d\theta = 0.$$

Autrement dit, en prenant le conjugué on a :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} e^{-in\theta} d\theta = 0. \quad (13)$$

Donc en combinant (12) et (13) on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \int_0^{2\pi} 2 \Re(P(e^{i\theta})) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (14)$$

Ceci reste vrai si $n = 0$, en posant $c_0 = P(0) = 1$.

d'où :

$$1 = c_0 = \int_0^{2\pi} \Re(P(e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi}. \quad (15)$$

En reprenant (14), on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq 2 \int_0^{2\pi} |\Re(P(e^{i\theta}))| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq 2 \int_0^{2\pi} \Re(P(e^{i\theta})) \frac{d\theta}{2\pi} \quad \text{car } \Re(P) \geq 0 \\ &\leq 2 \quad \text{d'après (15)} \end{aligned}$$

□

Ceci étant fait, on peut à présent passer à la théorie établie par Loewner. Il a développé et appliqué une méthode non élémentaire pour démontrer la borne sur a_3 . Elle reste aujourd'hui l'une des approches les plus efficaces pour les problèmes d'extrema des fonctions holomorphes injectives. Les objets centraux de cette théorie sont les *chaînes de Loewner*.

Définition 5.3. Soit $f \in \mathcal{S}$. On appelle chaîne de Loewner associée à f une fonction $F : \mathbb{D} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $z \mapsto F(z, t)$ est holomorphe injective sur \mathbb{D} .
- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $t \mapsto F(z, t)$ est mesurable et vérifie :
 1. Pour tout $0 \leq s \leq t < +\infty$, $F(\mathbb{D}, s) \subset F(\mathbb{D}, t)$.
 2. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, $F(z, t) = e^t z + a_2(t) z^2 + \dots$
 3. $F(z, 0) = f(z)$.

Remarque 5.4. La condition 2. est équivalente à la condition : pour tout $t \in [0, +\infty[$, $F(0, t) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(0, t) = e^t$

Définition 5.5. On appelle fonction slit – ou déchirure – une fonction holomorphe qui envoie de manière conforme un domaine Ω sur le complémentaire dans \mathbb{C} d'un arc de Jordan.

Remarque 5.6. On rappelle qu'un arc de Jordan est l'image un chemin continu injectif et qu'un domaine Ω est l'intérieur d'une courbe de Jordan fermé.

Le point de départ de la méthode de Loewner est de montrer que les fonctions slit sont denses dans la classe Schlicht, autrement dit que chaque \mathcal{S} -fonction peut être approchée uniformément sur les compacts de \mathbb{D} par une fonction slit.

Cependant il reste à justifier qu'à toute \mathcal{S} -fonction, on peut associer une chaîne de Loewner. On verra que dans le cas des fonctions slit, la chaîne de Loewner associée est unique.

5.2 Densité des fonctions slit

Définition 5.7. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de \mathbb{C} contenant 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère V_n la composante connexe de l'intérieur de $U_n \cap U_{n+1} \cap \dots$ contenant 0, qui peut être vide. Le noyau U de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors défini comme l'union des V_n si cette dernière est non vide, et comme $\{0\}$ sinon. Ainsi le noyau est soit un ouvert contenant 0 soit le singleton $\{0\}$.

De plus, on dit que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers son noyau si toute sous-suite de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a le même noyau. On note alors : $U_n \longrightarrow U$.

Exemple 5.8. Si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – suite d'ouverts connexes contenant 0 – est croissante, alors son noyau est : $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

Exemple 5.9. Par ailleurs, si on considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n correspond au plan \mathbb{C} privé de l'axe des réels et de l'arc $0 \leq \theta \leq 2\pi - \frac{1}{n}$ du cercle unité, alors $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, de noyau : $U = \mathbb{D}$ comme on le voit sur la figure 4.

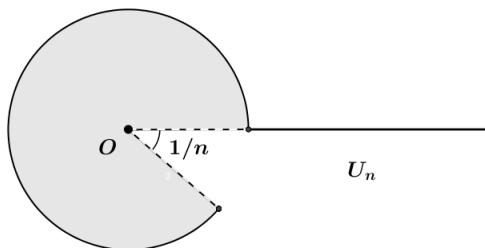


FIGURE 4 – Exemple de suite décroissante $(U_n)_n$

On va à présent énoncer le théorème de convergence Carathéodory qui permet de montrer la densité des fonctions slit dans la classe Schlicht.

Théorème 5.10 (Théorème de convergence de Carathéodory). Soit $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de domaines simplement connexes, distincts de \mathbb{C} et contenant 0. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications conformes entre \mathbb{D} et D_n qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ et $f'_n(0) > 0$.

On note D le noyau de la suite $(D_n)_n$. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers f si et seulement si $D_n \longrightarrow D$.

Dans le cas où il y a convergence, il y a deux possibilités :

1. Si $D = \{0\}$ alors $f = 0$.
2. Si $D \neq \{0\}$ alors D est simplement connexe et f est une application conforme entre \mathbb{D} et D . De plus, la suite des réciproques $(f_n^{-1})_n$ converge uniformément vers f^{-1} sur tout compact de D .

Remarque 5.11. Pour une démonstration de ce théorème, on se référera au chapitre 3 du livre de Peter Duren : [3].

On peut à présent énoncer et démontrer le théorème de densité des fonctions slit.

Théorème 5.12. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}$, il existe une suite de fonctions slit $(f_n)_n \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur tout compact de \mathbb{D} . Autrement dit, dans \mathcal{S} , la sous-classe des déchirures est dense.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{S}$. Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \rho < 1$.

Il suffit de construire une fonction slit $g \in \mathcal{S}$ telle que $|f(z) - g(z)| < \epsilon$ pour tout $|z| < \rho$.

On observe d'abord que toute fonction $f \in \mathcal{S}$ peut être approchée uniformément sur tout compact de \mathbb{D} par une fonction $h \in \mathcal{S}$ telle que $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{D}$ où \mathcal{D} est délimité par une arc de Jordan.

Par exemple, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(z) = \frac{f\left(\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)z\right)}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$,

fournit cette approximation.

Le bord de l'image des f_n est délimité par la courbe de Jordan γ_n définie par

$$\begin{aligned} \gamma_n &: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f\left(\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)e^{it}\right) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{K} \subset \mathbb{D}$ compact. Alors il existe $h \in \mathcal{S}$ dont l'image est délimité par une courbe de Jordan telle que pour tout $z \in \mathcal{K}$,

$$|f(z) - h(z)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

À présent, on veut approcher $h \in \mathcal{S}$ par une suite de fonctions slit. On note \mathcal{D} l'image de \mathbb{D} par h et \mathcal{C} la courbe de Jordan qui délimite le domaine \mathcal{D} .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère Γ_n un arc de Jordan qui part de l'infini jusqu'à un point $w_0 \in \mathcal{C}$ puis qui parcourt \mathcal{C} jusqu'à un autre point $w_n \in \mathcal{C}$ sans repasser par w_0 (voir figure 5).

On note $D_n = \mathbb{C} \setminus \Gamma_n$. Il s'agit d'un ouvert simplement connexe de \mathbb{C} . D'après le théorème de représentation conforme (théorème 1.9), il existe $g_n: \mathbb{D} \rightarrow D_n$ une application conforme telle que $g_n(0) = 0$ et $g'_n(0) \in \mathbb{R}_+^*$.

Par définition de Γ_n , comme on ne repasse jamais par w_0 , on peut choisir w_n de sorte que $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$ et que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0$.

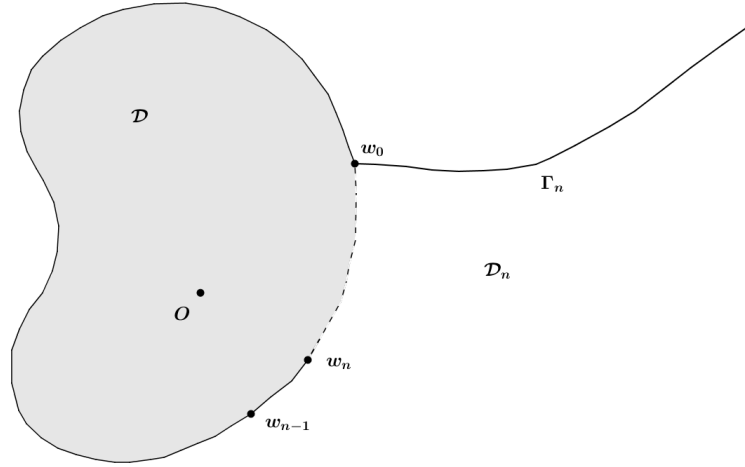


FIGURE 5 – Densité des fonctions slit

On en déduit que \mathcal{D} est le noyau de la suite $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et que $D_n \rightarrow \mathcal{D}$. En appliquant le théorème de convergence de Carathéodory (théorème 5.10), on en déduit que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers h uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Comme $g_n \rightarrow h$ uniformément sur \mathcal{K} , on déduit de la formule de Cauchy que $g'_n(z) \rightarrow h'(z)$. En particulier $g'_n(0) \rightarrow h'(0) = 1$ car $h \in \mathcal{S}$.

Donc pour tout n , $h_n = \frac{g_n}{g'_n(0)} \in \mathcal{S}$ est une fonction slit et $h_n \rightarrow h$ uniformément sur \mathcal{K} .

Ceci justifie l'existence de $g \in \mathcal{S}$ fonction slit telle que pour tout $z \in \mathcal{K}$,

$$|g(z) - h(z)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

En combinant les deux inégalités, on en déduit que pour tout $z \in \mathcal{K}$,

$$|g(z) - f(z)| \leq |g(z) - h(z)| + |h(z) - f(z)| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, les fonctions slit sont denses dans la classe de fonction \mathcal{S} . \square

La proposition suivante permet de montrer que l'espace des chaînes de Loewner est compact.

Proposition 5.13. *L'espace de chaîne de Loewner est compact : pour toute suite $(F_n(\cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ de chaînes de Loewner, il existe une sous-suite $(F_{n_k}(\cdot, \cdot))_k$ et $F(\cdot, \cdot)$ telles que pour $t \geq 0$, $F_{n_k}(\cdot, t)$ convergent localement uniformément vers $F(\cdot, t)$ sur \mathbb{D} .*

La démonstration de cet argument topologique n'étant pas indispensable à la

compréhension générale, on admettra pour le moment ce résultat. Il sera tout de même démontré à la fin de ce mémoire.

Par conséquent, il suffit de montrer l'existence d'une chaîne de Loewner associée à une fonction slit donnée pour en déduire – par densité et par compacité de l'espace des chaînes de Loewner – le même résultat sur les \mathcal{S} -fonctions.

5.3 Existence et unicité des chaînes de Loewner

La suite de la théorie de Loewner consiste à montrer que pour une fonction slit donnée, il existe une unique chaîne de Loewner.

Soit $f \in \mathcal{S}$ qui envoie de manière conforme \mathbb{D} sur un domaine \mathcal{D} qui est le complémentaire sur \mathbb{C} d'un arc de Jordan. On note Γ cet arc de Jordan qui part d'un point $w_0 \in \mathbb{C}$ et qui s'étend jusqu'à $+\infty$, ce qui garantit la simple connexité de \mathcal{D} .

On note $\gamma: [0, T[\rightarrow \mathbb{C}$ une paramétrisation continue arbitraire de Γ , autrement dit γ vérifie : $\gamma(0) = w_0$ et $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ si $s \neq t$.

Pour $t \in [0, T[$, on note Γ_t l'arc qui va de $\gamma(t)$ à l'infini, il s'agit donc d'une portion de Γ . On note également \mathcal{D}_t le complémentaire de Γ_t . On a ainsi les propriétés suivantes :

- $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$.
- Si $s < t$ alors $\mathcal{D}_s \subsetneq \mathcal{D}_t$.

Soit $t \in [0, T[$. Comme \mathcal{D}_t est un ouvert simplement connexe, par le théorème de représentation conforme il existe une unique application conforme :

$$F(\cdot, t) : \mathbb{D} \rightarrow \mathcal{D}_t$$

qui vérifie $F(0, t) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(0, t) > 0$. De plus, par normalisation on a : $F(\cdot, 0) = f$.

On sait que comme $f \in \mathcal{S}$, on peut écrire pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$

On déduit, de manière analogue, que l'on peut écrire F de la manière suivante : pour tout $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, T[$,

$$F(z, t) = \frac{\partial F}{\partial z}(0, t) (z + a_2(t) z^2 + a_3(t) z^3 + \dots) \quad (16)$$

Remarque 5.14. *Par souci de simplification des notations, on s'autorisera à*

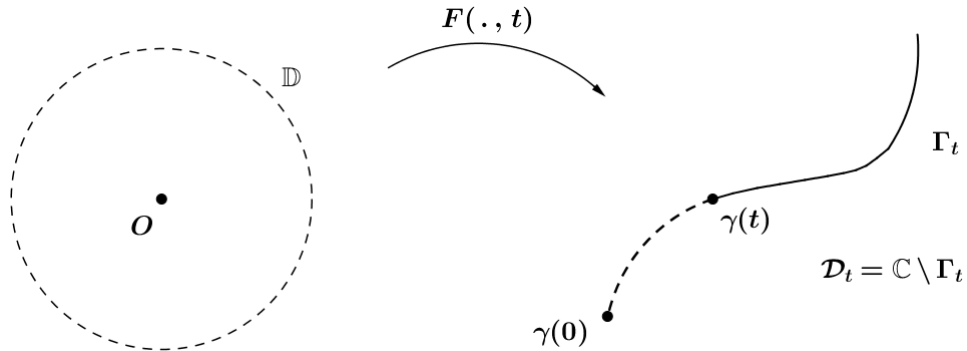


FIGURE 6 – Paramétrisation d’une fonction slit

écrire $F'(z, t) = \frac{\partial F}{\partial z}(z, t)$ pour tout $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, T[$.

De plus, quand cela s’avèrera utile, on s’autorisera également à noter F_t la fonction $F(\cdot, t)$ pour tout $t \in [0, T[$.

1. Montrons que $t \mapsto F'(0, t)$ est une fonction continue.

Soit $t \in [0, T[$. On considère $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d’éléments de $[0, T[$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t$.

On remarque que \mathcal{D}_t est le noyau de la suite $(\mathcal{D}_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ et que $\mathcal{D}_{t_n} \longrightarrow \mathcal{D}_t$. Par le théorème de convergence de Carathéodory (théorème 5.10), on en déduit que la suite $(F_{t_n})_n$ converge vers F_t uniformément sur tout compact de \mathbb{D} .

Donc par la formule de Cauchy, $(F'_{t_n})_n$ converge uniformément sur tout compact de \mathbb{D} vers F'_t . En particulier, $F'_{t_n}(0) \longrightarrow F'_t(0)$ et ceci dès que $t = \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n$.

On en déduit que $t \mapsto F'(0, t)$ est continue.

Remarque 5.15. On vient de montrer que $F_{t_n} \longrightarrow F_t$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} donc par la formule de Cauchy, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F_{t_n}^{(k)} \longrightarrow F_t^{(k)}$ uniformément sur tout compact de \mathbb{D} . Donc en fait, $t \mapsto F_t^{(k)}(0)$ est aussi continue.

Donc en reprenant (16) on en déduit que tous les coefficients de F sont continus, c’est-à-dire que pour tout $n \geq 2$, $t \mapsto a_n(t)$ est continue.

2. Montrons que $t \mapsto F'(0, t)$ est une fonction strictement croissante.

Soit $0 \leq s < t < T$. Montrons que $F'(0, s) < F'(0, t)$. Par propriété de \mathcal{D}_t , on a que $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_t$. Donc $F(0, s) \leq F(0, t)$.

On considère la fonction

$$F_t^{-1} \circ F_s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

Comme $F(0, s) = F(0, t) = 0$, on en déduit que $F_t^{-1} \circ F_s(0) = 0$. De plus, $F_t^{-1} \circ F_s$ est à valeur dans \mathbb{D} donc pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|F_t^{-1} \circ F_s(z)| < 1$.

Donc d'après le lemme de Schwarz (Lemme 1.2), on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|(F_t^{-1} \circ F_s)'(z)| \leq 1$. En particulier, $|(F_t^{-1} \circ F_s)'(0)| \leq 1$.

Or le lemme de Schwarz affirme aussi que si $|(F_t^{-1} \circ F_s)'(0)| = 1$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| = 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $F_t^{-1} \circ F_s(z) = \lambda z$.

Donc $F_t^{-1} \circ F_s : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est un automorphisme. On a donc $F_t^{-1} \circ F_s(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ c'est-à-dire $F_s(\mathbb{D}) = F_t(\mathbb{D})$. Ceci est contradictoire par construction de F_t et F_s . Donc :

$$|(F_t^{-1} \circ F_s)'(0)| < 1.$$

Or pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a :

$$(F_t^{-1} \circ F_s)'(z) = F_s'(z) (F_t^{-1})' \circ F_s(z) = F_s'(z) \frac{1}{F_t' \circ F_t^{-1}}(F_s(z))$$

$$\text{Donc } (F_t^{-1} \circ F_s)'(0) = \frac{F_s'(0)}{F_t'(0)}$$

On en déduit que $|F'(0, s)| < |F'(0, t)|$ et donc $t \mapsto F'(0, t)$ est strictement croissante.

3. Reparamétrisation de la fonction $t \mapsto F'(0, t)$.

On sait que $t \mapsto F'(0, t)$ est strictement croissante. De plus $F'(0, 0) = 1$ car $F(\cdot, 0) = f$ et $f'(0) = 1$. On en déduit que :

$$\forall t \in [0, T[, F'(0, t) > 0.$$

On vient donc de montrer successivement que $t \mapsto F'(0, t)$ est une fonction continue, strictement croissante, strictement positive et que $F'(0, 0) = 1$: on peut donc la reparamétriser de sorte que pour tout $t \in [0, T[, F'(0, t) = e^t$.

Pour cela, on choisit une nouvelle paramétrisation de $\Gamma : \gamma^*$ telle que pour tout $0 \leq t < T^*$, $\gamma^*(t) = \gamma(\sigma(t))$. On alors alors la fonction F^* associée qui vérifie $(F^*)'(0, t) = F'(0, \sigma(t))$.

Si on choisit pour tout $0 \leq t < T^*$, $\sigma(t) = (F')^{-1}(0, e^t)$ alors on a bien

$$(F^*)'(0, t) = e^t.$$

Il reste à montrer qu'avec cette paramétrisation, on a $T^* = +\infty$.

Soit $M > 0$. Pour t suffisamment proche de T^* , Γ_t est entièrement à l'extérieur du cercle de centre 0 et de rayon M .

On déduit du principe du module maximum que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{z}{F(z, t)} \right| \leq \frac{1}{M}.$$

En particulier, $M \leq |F'(0, t)| = e^t$ pour t suffisamment proche de T^* . M étant arbitraire, on en déduit que $e^t \rightarrow +\infty$ lorsque $t \rightarrow T^*$. Autrement dit $T^* = +\infty$.

En conclusion, on a considéré un fonction $f \in \mathcal{S}$ dont l'image est le complémentaire d'un arc de Jordan Γ . Alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

On a choisi une paramétrisation $\gamma(t)$ de cet arc Γ et on a construit une fonction

$$F : \mathbb{D} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) \longmapsto e^t \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t) z^n \right) \quad (17)$$

où pour tout $n \geq 2$, $t \mapsto b_n(t)$ est continue sur \mathbb{R}^+ et $b_n(0) = a_n$ pour tout $n \geq 2$. Ce choix de paramétrisation s'appelle la *paramétrisation standard* de Γ .

Bien que le procédé semble canonique, il reste à montrer qu'il existe une unique chaîne de Loewner associée à la déchirure f .

Soit \tilde{F} une chaîne de Loewner associée à la déchirure f , construite de la même manière que F . On conserve les mêmes notations que précédemment. Soit $t \geq 0$.

- Si $\tilde{\mathcal{D}}_t \subset \mathcal{D}_t$, on a $F_t \circ \tilde{F}_t^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ qui fixe 0, de dérivée 1 en 0. On déduit du lemme de Schwarz que $F_t \circ \tilde{F}_t^{-1} = id_{\mathbb{D}}$. Autrement dit $F_t = \tilde{F}_t$.
- Si $\mathcal{D}_t \subset \tilde{\mathcal{D}}_t$, alors on applique l'argument symétrique.

On conclut que l'on a bien unicité de la chaîne de Loewner car l'une des deux inclusions est nécessairement vraie.

Au final, on a montré que pour une fonction slit donnée, il existe une unique chaîne de Loewner associée.

5.4 Equation différentielle de Loewner

En gardant les mêmes notations que précédemment, on considère la fonction

$$f : \mathbb{D} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) \longmapsto F_t^{-1}(f(z))$$

Autrement dit, pour tout $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, +\infty[$,

$$f(z, t) = e^{-t} \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) z^n \right) \quad (18)$$

On remarque que $f(z, 0) = z$ car $F(z, 0) = f(z)$.

De plus, pour tout $n \geq 2$, $t \mapsto a_n(t)$ est continue comme fonction polynomiale des $b_k(t)$ ($2 \leq k < n$) qui le sont.

Nous allons montrer que $a_n(t) \longrightarrow a_n$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$. Il s'agit d'une conséquence du théorème suivant :

Théorème 5.16. *Soit $f \in \mathcal{S}$ une fonction slit dont l'image est le complémentaire d'un arc de Jordan Γ . Soit $\gamma(t)$ ($0 \leq t < +\infty$) la paramétrisation standard de Γ et la fonction $(z, t) \mapsto f(z, t)$ comme définie en (18). Alors $f(z, t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = -f(z, t) \frac{1 + \kappa(t) f(z, t)}{1 - \kappa(t) f(z, t)} \quad (19)$$

où $t \mapsto \kappa(t)$ est une fonction continue telle que $|\kappa(t)| = 1$ pour tout $t \in [0, +\infty[$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z) \quad (20)$$

et la convergence est uniforme sur les compacts de \mathbb{D} .

Lemme 5.17. *Avec les mêmes notations que précédemment, lorsque $t \rightarrow +\infty$, $e^t F_t^{-1} \longrightarrow id_{\mathbb{C}}$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C} .*

Démonstration du lemme 5.17. Une fois que l'on aura montré ce résultat, on en déduira directement (20).

Comme $e^t F(\cdot, t) \in \mathcal{S}$, on peut appliquer le théorème de Distorsion (théorème 4.13) à cette fonction, où $z \mapsto F(z, t)$ est définie en (17). On a alors pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\frac{e^t |z|}{(1 + |z|)^2} \leq |F(z, t)| \leq \frac{e^t |z|}{(1 - |z|)^2}$$

Soit $w \in \mathbb{C}$. On pose $z = F_t^{-1}(w)$ pour t suffisamment grand. On remarque

que $w = F(z, t)$. On a alors :

$$\frac{e^t |F_t^{-1}(w)|}{(1 + |F_t^{-1}(w)|)^2} \leq |w| \leq \frac{e^t |F_t^{-1}(w)|}{(1 - |F_t^{-1}(w)|)^2}$$

c'est-à-dire

$$(1 - |F_t^{-1}(w)|)^2 \leq e^t \left| \frac{F_t^{-1}(w)}{w} \right| \leq (1 + |F_t^{-1}(w)|)^2 \quad (21)$$

En particulier, par le membre de droite de l'inégalité et comme $F_t^{-1}(w) \in \mathbb{D}$, on a : $|F_t^{-1}(w)| \leq 4 |w| e^{-t}$. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_t^{-1}(w) = 0$$

et la limite est uniforme sur les compacts de \mathbb{C} .

En reprenant (21), on en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| e^t \frac{F_t^{-1}(w)}{w} \right| = 1$$

On a une extension évidente en $w = 0$.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{R}^+ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$.

D'après le théorème de Montel (théorème 1.5), il existe une sous suite $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$

telle que $\left(e^{t_{n_k}} \frac{F_{t_{n_k}}^{-1}(w)}{w} \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{C} vers une fonction holomorphe ϕ .

On a alors pour tout $w \in \mathbb{C}$, $|\phi(w)| = 1$, mais comme $\phi(0) = 1$, on déduit du théorème de Liouville que $\phi \equiv 1$.

Comme la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été choisie de manière arbitraire, on en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t F_t^{-1}(w)}{w} = 1$$

uniformément sur les compacts de \mathbb{C} .

En particulier, $e^t F_t^{-1}(w) \rightarrow w$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C} . □

Remarque 5.18. On a donc montré l'équation (20) : pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(z, t) = f(z)$$

avec convergence uniforme sur les compacts de \mathbb{D} .

La preuve du théorème 5.16 est particulièrement technique et elle n'est pas indispensable à la compréhension globale. C'est pour cette raison que nous allons admettre ce théorème pour le moment et l'utiliser à bonne escient dans l'application de la conjecture. Pour les plus curieux, une démonstration de ce théorème sera donnée tout à la fin du mémoire.

Le théorème 5.16 permet donc de montrer que toute fonction slit $f \in \mathcal{S}$ est limite uniforme de la fonction $z \mapsto e^t f(z, t)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ où $f(z, t)$ satisfait la condition initiale $f(z, 0) = z$ et est donnée par l'équation différentielle de Loewner décrite dans le théorème 5.16 avec une certaine fonction κ continue de module 1.

5.5 Le troisième coefficient

Soit $f : \mathbb{D} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une chaîne de Loewner.

On considère h la fonction définie dans la précédente démonstration, c'est-à-dire : Soit $0 \leq s < t < +\infty$, on pose

$$\begin{aligned} h(\cdot, s, t) & : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ z & \longmapsto [f(\cdot, t)]^{-1} \circ f(\cdot, s)(z) \end{aligned}$$

On a donc $f(h(z, s, t), t) = f(z, s)$.

À présent, on va construire une équation différentielle vérifiée par la chaîne de Loewner $f(z, t)$. Pour cela, la première chose à faire est de montrer que $t \mapsto f(z, t)$ est absolument continue sur $[0, +\infty[$.

Or comme $z \mapsto f(z, t)$ est une chaîne de Loewner, on peut écrire pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$f(z, t) = e^t z + a_2(t) z^2 + \dots$$

Remarque 5.19. *Une fois établies l'existence et l'unicité d'une chaîne de Loewner associée à une fonction slit, on a conclu qu'il s'agit d'une fonction de la forme*

$$\begin{aligned} f & : \mathbb{D} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, t) & \longmapsto e^t \left(z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n(t) z^n \right) \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $a_n(t) = e^t b_n(t)$ pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in [0, +\infty[$ avec les précédentes notations.

Il suffit donc de montrer que pour tout $n \geq 2$, $t \mapsto a_n(t)$ est absolument continue. Il va s'agir de la proposition suivante.

Proposition 5.20. *Pour tout $n \geq 2$, $T > 0$, $t \mapsto a_n(t)$ est absolument continue sur $[0, T]$.*

Avant de le démontrer, on a besoin du lemme suivant qui est un jeu d'inégalités sur les fonctions f et h .

Lemme 5.21. *On considère f et h comme définies précédemment. Soit $z \in \mathbb{D}$. Pour $0 \leq s \leq t \leq u < +\infty$, on a :*

$$|f(z, t) - f(z, s)| \leq \frac{8|z|}{(1-|z|)^4} (e^t - e^s) \quad (22)$$

$$|h(z, t, u) - h(z, s, u)| \leq \frac{2|z|}{(1-|z|)^2} (1 - e^{s-t}) \quad (23)$$

Remarque 5.22. *Une manière facile de construire un nombre complexe de partie réelle strictement positive est de considérer l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{D} &\longrightarrow \{z \mid \Re(z) > 0\} \\ z &\longmapsto \frac{1-z}{1+z}. \end{aligned}$$

Cette application est bien définie. En effet, comme $z \in \mathbb{D}$, on a $|z| < 1$. Donc :

$$\Re\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|1+z|^2} > 0$$

Et on montre aisément qu'il s'agit d'un isomorphisme.

Démonstration du lemme 5.21. Soit $0 \leq s \leq t \leq u < +\infty$.

Comme h est à valeur dans \mathbb{D} , on déduit du lemme de Schwarz (Théorème 1.2) que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|h(z, s, t)| \leq |z|$.

Supposons qu'il existe $z \in \mathbb{D}$, tel que $|h(z, s, t)| = |z|$. Alors par le lemme de Schwarz, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, vérifiant $|\alpha| = 1$ tel que $h(z, s, t) = \alpha z$. Par définition de h , on aurait donc $F_s(\mathbb{D}) = F_t(\mathbb{D})$, ce qui contredit la définition de F_s et F_t . On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$|h(z, s, t)| < |z|.$$

On pose pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$p(z, s, t) = \frac{1 + e^{s-t}}{1 - e^{s-t}} \frac{1 - z^{-1} h(z, s, t)}{1 + z^{-1} h(z, s, t)}$$

Par définition de h on a pour tout $z \in \mathbb{D}$, $h(z, s, t) = e^{s-t} z + \dots$

Ainsi, on vérifie que $p(0, s, t) = 1$ et $\Re(p) > 0$.

Comme p est une fonction holomorphe sur \mathbb{D} , on peut la développer en série

entière au voisinage de 0. Alors on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$p(z, s, t) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

On peut donc appliquer le lemme 5.2 à la fonction p : pour tout $n \geq 1$,

$$|c_n| \leq 2.$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|p(z, s, t)| \leq 1 + 2|z| + 2|z|^2 + 2|z|^3 + \dots$$

c'est-à-dire pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|p(z, s, t)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}.$$

En reprenant la définition de p , on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |z - h(z, s, t)| &\leq |z + h(z, s, t)| \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \frac{1 - e^{s-t}}{1 + e^{s-t}} \\ &\leq 2|z| \frac{1 + |z|}{1 - |z|} (1 - e^{s-t}) \end{aligned}$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|f(z, t) - f(z, s)| = |f(z, t) - f(h(z, s, t), t)| \leq \int_{h(z, s, t)}^z |f'(\zeta, t)| d\zeta$$

Donc en utilisant le théorème de Distorsion (théorème 4.13), on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$\begin{aligned} |f(z, t) - f(z, s)| &\leq |z - h(z, s, t)| e^t \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3} \\ &\leq 2|z| \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^4} (e^t - e^s) \\ &\leq \frac{8|z|}{(1 - |z|)^4} (e^t - e^s) \end{aligned}$$

Pour la seconde inégalité, on procède de la même manière. En effet, on sait que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(h(z, s, t), t) = f(z, s)$. On a donc que

$$h(z, s, u) = h(h(z, s, t), t, u).$$

Ainsi, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
|h(z, s, u) - h(z, t, u)| &= |h(h(z, s, t), t, u) - h(z, t, u)| \\
&\leq |z - h(z, s, t)| \frac{1}{1 - |z|^2} \\
&\leq \frac{2|z|}{(1 - |z|)^2} (1 - e^{s-t})
\end{aligned}$$

où on a appliqué la seconde inégalité du lemme 5.1 pour conclure. \square

On peut désormais démontrer la proposition 5.20.

Démonstration de la proposition 5.20. On rappelle que l'on travaille avec la chaîne de Loewner $f(z, t)$ telle que pour tout $(z, t) \in \mathbb{D} \times [0, +\infty[$,

$$f(z, t) = e^t z + a_2(t) z^2 + \dots$$

Soit $0 < r < 1$. Par la formule de Cauchy, on a pour tout $n \geq 2$, $T > 0$ et pour tout $t \in [0, T]$,

$$a_n(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta, t)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

Soit $n \geq 2$. Soit $t, s \in [0, T]$. On a :

$$\begin{aligned}
|a_n(t) - a_n(s)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta, t) - f(\zeta, s)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|\zeta|=r} \frac{8|\zeta|}{(1 - |\zeta|)^4} \frac{|e^t - e^s|}{|\zeta|^{n+1}} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} e^T |t - s| \left| \int_{|\zeta|=r} \frac{8}{(1 - |\zeta|)^4 |\zeta|^n} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} e^T |t - s| \left| \int_0^{2\pi} \frac{8}{(1 - r)^4 r^n} r i e^{i\theta} d\theta \right| \\
&\leq C_n e^T |t - s|
\end{aligned}$$

où $C_n = \frac{8}{(1 - r)^4 r^{n-1}}$

Soit $\epsilon > 0$. On choisit $\delta = \frac{\epsilon}{C_n e^T}$. Alors pour tout t, s tels que $|t - s| < \delta$, on

a $|a_n(t) - a_n(s)| < \epsilon$.

On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $T > 0$ $t \mapsto a_n(t)$ est absolument continue sur $[0, T]$. \square

Théorème 5.23. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Soit F une fonction absolument continue sur $[a, b]$. Alors F' existe presque partout et est intégrable. De plus elle satisfait la formule de Newton-Leibniz : pour tout $x \in [a, b]$,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y) dy$$

Soit $n \geq 1$ fixé. On pose $T = N$. On déduit alors du théorème 5.23 et de la proposition 5.20, qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}_{n,N} \subset [0, N]$ de mesure nulle tel que a'_n existe sur $[0, N] \setminus \mathcal{E}_{n,N}$ et satisfait la formule de Leibniz-Newton.

Alors, on pose :

$$\mathcal{E} := \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{N=0}^{+\infty} \mathcal{E}_{n,N}$$

L'ensemble \mathcal{E} ainsi défini est mesurable de mesure nulle, tel que a'_n existe sur $[0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$.

De plus, pour tout $n \geq 2$ et $0 \leq t \leq s < +\infty$,

$$a_n(t) - a_n(s) = \int_s^t a'_n(u) du$$

On peut à présent énoncer le théorème qui va nous permettre de démontrer la conjecture de Bieberbach pour le troisième coefficient :

Théorème 5.24. En gardant les mêmes notations que précédemment, il vient que $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe sur $\mathbb{D} \times ([0, +\infty[\setminus \mathcal{E})$ et satisfait la relation :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n$$

De plus, il existe une fonction p vérifiant $\Re(p) > 0$ et telle que :

- pour tout $t \in [0, +\infty[$, $z \mapsto p(z, t)$ est holomorphe que \mathbb{D}
- pour tout $z \in \mathbb{D}$, $t \mapsto p(z, t)$ est mesurable sur $[0, +\infty[$

qui satisfait pour tout $z \in \mathbb{D}$, $t \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = z p(z, t) \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \tag{24}$$

Démonstration. Soit $0 < r < 1$ et $T > 0$. D'après la démonstration de la proposition 5.20, on a pour tout $t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$, on a :

$$|a'_n(t)| \leq \frac{8 e^T}{(1-r)^4 r^{n-1}}$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n$ est bien définie sur $\mathcal{D}(0, r) \times ([0, T] \setminus \mathcal{E})$. En faisant tendre $r \rightarrow 1$ et $T \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n$ est bien définie sur $\mathbb{D} \times ([0, +\infty[\setminus \mathcal{E})$.

Montrons à présent que pour tout $|z| < r$ et pour tout $t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(z, s) - f(z, t)}{s - t} = \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n$$

Soit $\epsilon > 0$.

Soit $|z| < r$ et $s, t \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$. Par définition de f , on a :

$$\frac{f(z, s) - f(z, t)}{s - t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s - t} z^n$$

Comme d'après la preuve de la proposition 5.20, on a pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s - t} \right| \leq C_n e^T \quad \text{avec } C_n = \frac{8}{(1 - r)^4 r^{n-1}}$$

On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\sum_{n=N}^{+\infty} \left| \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s - t} z^n \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=N}^{+\infty} |a'_n(t) z^n| < \frac{\epsilon}{3}$$

De plus,

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s - t} = a'_n(t)$$

On peut donc choisir $\delta > 0$ tel que pour tout $|z| < r$ et pour tout $|s - t| < \delta$ on ait :

$$\left| \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n(s) - a_n(t)}{s - t} z^n - \sum_{n=1}^{N-1} a'_n(t) z^n \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Ainsi en combinant ces résultats, pour tout $|z| < r$ et $t, s \in [0, T] \setminus \mathcal{E}$ tels que $|s - t| < \delta$, on a :

$$\left| \frac{f(z, s) - f(z, t)}{s - t} - \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n \right| < \epsilon$$

En faisant tendre $T \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 1$, on en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a'_n(t) z^n$$

Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $s \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$, on pose :

$$p(z, s) := \frac{\partial f}{\partial s}(z, s) \left(z \frac{\partial f}{\partial z}(z, s) \right)^{-1}$$

A s fixé, $z \mapsto f(z, s)$ est une fonction injective, on en déduit que $\frac{\partial f}{\partial z}(z, s) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

De plus, pour $s \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$ fixé, $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial s}(z, s)$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{D} qui vérifie $\frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0$. On en déduit que $z \mapsto p(z, s)$ définit une fonction holomorphe sur \mathbb{D} .

Dans la démonstration du lemme 5.21, on avait défini sur $\mathbb{D} \times [0, +\infty[$, la fonction

$$p(z, s, t) = \frac{1 + e^{s-t}}{1 - e^{s-t}} \frac{1 - z^{-1} h(z, s, t)}{1 + z^{-1} h(z, s, t)}$$

Soit $s, t \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$. Soit $z \in \mathbb{D}$. On a alors :

$$\frac{f(z, t) - f(z, s)}{t - s} = \frac{e^{t-s} - 1}{t - s} \frac{z + h(z, s, t)}{e^{t-s} + 1} \frac{f(z, t) - f(h(z, s, t), t)}{z - h(z, s, t)} p(z, s, t)$$

En faisant tendre $s \rightarrow t$ on obtient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = 1 \cdot z \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(z, t) \cdot \lim_{s \rightarrow t} p(z, s, t)$$

D'où

$$\lim_{s \rightarrow t} p(z, s, t) = p(z, t)$$

De plus, on a vu que $\Re(p(z, s, t)) > 0$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, $t, s \in [0, +\infty[$, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{D}$, $s \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$,

$$\Re(p(z, s)) > 0$$

car l'image de $z \mapsto p(z, t)$ est ouverte et $p(0, t) = 1$. □

Remarque 5.25. *On constate que la fonction $(z, t) \mapsto p(z, t)$ ainsi construite, appartient à la classe de fonctions \mathcal{P} .*

La démonstration du troisième coefficient de la conjecture de Bieberbach va

reposer sur l'équation différentielle (24) du théorème que l'on vient de prouver.

Réécrivons les fonctions $f(z, t)$ et $p(z, t)$ sous la forme de série entière : pour tout $z \in \mathbb{D}$, $t \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$,

$$f(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) z^n \quad \text{et} \quad p(z, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n(t) z^n \quad (25)$$

On remarque que :

- $a_1(t) = e^t$
- pour tout $n \geq 1$, $a_n(0) = a_n$
- $p_0(t) = 1$ car $p(0, s, t) = 1$ et par passage à la limite.
- pour tout $n \geq 2$, $|p_n(t)| \leq 2$ car d'après la remarque 5.25 la fonction p est dans la classe \mathcal{P} (définie dans le lemme 5.2) donc elle vérifie le lemme 5.2.

En insérant les expressions de (24) dans l'équation différentielle (25), on obtient à partir de la formule du produit de Cauchy, que pour tout $n \geq 2$,

$$a'_n(t) = n a_n(t) + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k(t) p_{n-k}(t)$$

On multiplie par e^{-nt} puis on intègre de t à $+\infty$ grâce à une intégration par parties, on obtient pour tout $n \geq 2$:

$$e^{-nt} a_n(t) = - \int_t^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k a_k(s) p_{n-k}(s) \right) e^{-ns} ds \quad (26)$$

Or d'après la proposition 4.16 on a pour tout $k \geq 1$, $s \geq 0$, $|a_k(s)| \leq \frac{k^2 e^2}{4} e^s$ et $|p_k(s)| \leq 2$ d'après le lemme 5.2. On en déduit que l'intégrale 26 est convergente.

En prenant $n = 2$ dans l'équation (26) on a :

$$a_2(t) = -e^{2t} \int_t^{+\infty} p_1(s) e^{-s} ds \quad (27)$$

Comme $|p_1(s)| \leq 2$, on en déduit que :

$$|a_2| = |a_2(0)| = \left| \int_0^{+\infty} p_1(s) e^{-s} ds \right| \leq \int_0^{+\infty} 2 e^{-s} ds = 2$$

Remarque 5.26. On vient donc au passage de redémontrer le cas $n = 2$ de

la conjecture de Bieberbach (théorème 4.6).

À présent, en choisissant $n = 3$ dans l'équation 26, on obtient :

$$e^{-3t} a_3(t) = - \int_t^{+\infty} (a_1(s) p_2(s) + 2 a_2(s) p_1(s)) e^{-3s} ds$$

Autrement dit,

$$a_3 = a_3(0) = - \int_0^{+\infty} (e^s p_2(s) + 2 a_2(s) p_1(s)) e^{-3s} ds$$

En remplaçant $a_2(s)$ par l'expression (27) on obtient :

$$\begin{aligned} a_3 &= - \int_0^{+\infty} p_2(s) e^{-2s} ds + 2 \int_0^{+\infty} p_1(s) e^{-3s} \left(e^{2s} \int_s^{+\infty} p_1(u) e^{-u} du \right) ds \\ &= - \int_0^{+\infty} p_2(s) e^{-2s} ds + 2 \int_0^{+\infty} p_1(s) e^{-s} \left(\int_s^{+\infty} p_1(u) e^{-u} du \right) ds \\ &= - \int_0^{+\infty} p_2(s) e^{-2s} ds + \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} p_1(s) p_1(u) e^{-s-u} du ds \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \int_0^u p_1(s) p_1(u) e^{-s-u} ds du \end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini pour la dernière intégrale double. Comme s et u jouent des rôles symétriques, on peut regrouper les deux derniers membres pour obtenir :

$$a_3 = - \int_0^{+\infty} p_2(s) e^{-2s} ds + \left(\int_0^{+\infty} p_1(s) e^{-s} ds \right)^2 \quad (28)$$

Si on utilise directement le fait que $|p_1(t)| \leq 2$ et que $|p_2(t)| \leq 2$, on obtient seulement que $|a_3| \leq 5$. Il ne s'agit pas de la borne attendue, il faut donc procéder autrement.

Commençons par constater que \mathcal{S} est préservé par les rotations. De ce fait, il suffit de prouver le résultat en supposant : a_3 positif et réel.

Si ce n'est pas le cas, on remplace f par la fonction $z \mapsto e^{i\alpha} f(z e^{-i\alpha})$

$$e^{i\alpha} f(z e^{-i\alpha}) = z + e^{-i\alpha} a_2 z^2 + e^{-i\alpha} a_3 z^3 + \dots$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est choisi de sorte que $e^{-i\alpha} a_3 \geq 0$.

Supposons désormais $a_3 \geq 0$. En reprenant (28), on a :

$$|a_3| = \Re(a_3) \leq - \int_0^{+\infty} \Re(p_2(s)) e^{-2s} ds + \left(\int_0^{+\infty} \Re(p_1(s)) e^{-s} ds \right)^2$$

On a alors besoin du lemme suivant :

Lemme 5.27. *Soit $t \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$. Alors on a :*

$$(\Re p_1(t))^2 \leq 2 + \Re p_2(t)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, +\infty[\setminus \mathcal{E}$. On considère la fonction :

$$\begin{aligned} \Psi &: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z} \frac{p(z, t) - 1}{p(z, t) + 1} ; \end{aligned}$$

On sait que $\Re(p(\cdot, t)) > 0$ sur \mathbb{D} et $p(0, t) = 1$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{D}$:

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= \frac{1}{z} \frac{p_1(t)z + p_2(t)z^2 + \dots}{2 + p_1(t)z + \frac{p_2(t)}{2}z^2 + \dots} \\ &= \frac{1}{2z} (p_1(t)z + p_2(t)z^2 + \dots) \left(1 - \frac{p_1(t)}{2}z - \frac{p_2(t)}{2}z^2 + \frac{p_1(t)^2}{4}z^2 + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} p_1(t) + \left(\frac{1}{2} p_2(t) - \frac{1}{4} (p_1(t))^2 \right) z + \dots \end{aligned}$$

On applique le lemme 5.1 à la fonction Ψ et on en déduit que

$$\left| \frac{1}{2} p_2(t) - \frac{1}{4} (p_1(t))^2 \right| \leq 1 - \frac{1}{4} |p_1(t)|^2$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} |p_1(t)|^2 &\geq \left| \frac{1}{2} p_2(t) - \frac{1}{4} (p_1(t))^2 \right| \\ &\geq \left| \Re \left(\frac{1}{2} p_2(t) - \frac{1}{4} (p_1(t))^2 \right) \right| \\ &\geq -\frac{1}{2} \Re p_2(t) + \frac{1}{4} \Re (p_1(t))^2 \end{aligned}$$

Donc,

$$2 + \Re p_2(t) \geq \frac{1}{2} \Re (p_1(t))^2 + \frac{1}{2} |p_1(t)|^2 = (\Re p_1(t))^2 .$$

□

On utilise à présent l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} \Re(p_1(s)) e^{-s} ds \right)^2 &\leq \left(\int_0^{+\infty} (\Re p_1(s))^2 e^{-s} ds \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-s} ds \right) \\ &= \int_0^{+\infty} (\Re p_1(s))^2 e^{-s} ds \end{aligned}$$

En substituant ceci dans (28) et en utilisant le lemme 5.27, on obtient :

$$\begin{aligned} |a_3| &\leq \int_0^{+\infty} (2 - (\Re p_1(t))^2) e^{-2s} ds + \left(\int_0^{+\infty} \Re(p_1(s)) e^{-s} ds \right)^2 \\ &\leq \int_0^{+\infty} 2 e^{-2s} ds - \int_0^{+\infty} (\Re p_1(t))^2 e^{-2s} ds + \left(\int_0^{+\infty} \Re(p_1(s)) e^{-s} ds \right)^2 \\ &\leq 1 + \int_0^{+\infty} (\Re p_1(t))^2 (e^{-s} - e^{-2s}) ds \end{aligned}$$

En utilisant alors que $|\Re p_1(t)| \leq |p_1(t)| \leq 2$, on obtient :

$$|a_3| \leq 1 + 4 \int_0^{+\infty} (e^{-s} - e^{-2s}) ds \leq 1 + 4 - 2 = 3$$

On vient donc de montrer le cas $n = 3$ de la conjecture de Bieberbach pour les fonctions slit. On déduit le résultat final par densité des fonctions slit dans la classe de fonctions \mathcal{S} .

Il reste à présent à traiter le cas d'égalité.

Remarquons d'abord que si l'on utilise le même argument pour le cas d'égalité, cela ne fonctionnerait pas. En effet, si on parvient à montrer que les seules fonctions vérifiant $|a_3| = 3$ sont les rotations de la fonction de Koebe, rien n'assure qu'on puisse les approcher par des fonctions slit vérifiant aussi $|a_3| = 3$. On doit donc procéder différemment.

Il faut travailler directement avec une chaîne de Loewner associée à une fonction f de la classe de Schlicht. En procédant de la même manière que sur les déchirures, on montre l'inégalité $|a_3| \leq 3$. Puis, concernant le cas d'égalité on procède de la manière suivante :

Quand on a l'égalité, on a pour presque tout s :

$$|\Re p_1(s)| = |p_1(s)| = 2$$

et

$$\left(\int_0^{+\infty} \Re p_1(s) e^{-s} ds \right)^2 = \int_0^{+\infty} (\Re p_1(s))^2 e^{-s} ds$$

c'est-à-dire pour presque tout s , $p_1(s) = 2$ ou $p_1(s) = -2$

D'après (27), on a :

$$|a_2| = \left| \int_0^{+\infty} p_1(s) e^{-s} ds \right| = 2$$

On s'est donc ramené au cas d'égalité du cas $n = 2$, on en déduit donc que f est une rotation de fonction de Koebe.

Ceci achève la démonstration de la conjecture de Bieberbach dans le cas $n = 3$.

5.6 Compacité des chaînes de Loewner

Revenons à présent à la démonstration de la compacité des chaînes de Loewner, que l'on a énoncé auparavant.

Démonstration de la proposition 5.13. Soit $m \geq 2$. On définit l'ensemble :

$$K_m = \left\{ z \mid |z| \leq 1 - \frac{1}{m} \right\} \times [0, m]$$

Pour $m \geq 2$, $K_m \subset \mathbb{D} \times [0, +\infty[$ est un espace compact. De plus, la suite $(K_m)_{m \geq 2}$ est croissante.

Soit $(F_n(\cdot, \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de chaînes de Loewner. Par le théorème de Distorsion, on a pour tout $(z, t) \in K_m$:

$$|F_n(z, t)| \leq \frac{|z| e^t}{(1 - |z|)^2} \leq (m^2 - m) e^m$$

On en déduit que $F_n(\cdot, \cdot)$ est uniformément bornée sur K_m .

Soit $(z_1, s), (z_2, t) \in K_m$ avec $s \leq t$. On tire du théorème de Distorsion et du lemme 5.21 que :

$$\begin{aligned}
|F_n(z_1, s) - F_n(z_2, t)| &\leq |F_n(z_1, s) - F_n(z_1, t)| + |F_n(z_1, t) - F_n(z_2, t)| \\
&\leq |F_n(z_1, s) - F_n(z_1, t)| + \max_{\zeta \in [z_1, z_2]} |F'_n(\zeta, t)| |z_1 - z_2| \\
&\leq \left| \frac{8 |z_1|}{(1 - |z_1|)^4} (e^t - e^s) \right| + \max_{\zeta \in [z_1, z_2]} \frac{(1 + |\zeta|) e^t}{(1 - |\zeta|)^3} |z_1 - z_2| \\
&\leq 8 m^3 (m - 1) e^m |s - t| + m^2 (2m - 1) e^m |z_1 - z_2|.
\end{aligned}$$

Ainsi $F_n(\cdot, \cdot)$ est équicontinue en $(z_1, s) \in K_m$. On utilise donc le théorème d'Arzelà-Ascoli pour extraire de la suite $(F_n(\cdot, \cdot))_n$ une sous-suite $(F_{n,m}(\cdot, \cdot))_k$ qui converge uniformément sur K_m .

Comme $K_2 \subset K_3 \subset K_4 \subset \dots$, on peut d'abord extraire de la suite $(F_n(\cdot, \cdot))$ une sous-suite $(F_{n,2}(\cdot, \cdot))$ qui converge uniformément sur K_2 . Puis, on extrait de la suite $(F_{n,2}(\cdot, \cdot))$ une sous-suite $(F_{n,3}(\cdot, \cdot))$ qui converge uniformément sur K_3 .

De manière analogue, on extrait de la suite $(F_{n,m}(\cdot, \cdot))$ une sous-suite $(F_{n,m+1}(\cdot, \cdot))$ qui converge uniformément sur K_{m+1} .

On définit à présent une nouvelle suite : $(F_{n,+\infty}(\cdot, \cdot))$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{D} \times [0, +\infty[$. On note $F(\cdot, \cdot)$ sa limite.

Alors $F(\cdot, t)$ est une fonction holomorphe sur \mathbb{D} pour tout $t \in [0, +\infty[$ avec $F'(0, t) = e^t$. On déduit du théorème de Hurwitz (théorème 1.4) que pour tout $t \in [0, +\infty[$, $F(\cdot, t)$ est injective sur \mathbb{D} .

Il reste à vérifier $F(\cdot, \cdot)$ est une chaîne de Loewner. Pour cela, d'après ce que l'on a vu précédemment, il suffit de trouver une fonction holomorphe injective $h(\cdot, s, t)$ sur \mathbb{D} vérifiant :

- Pour tout $z \in \mathbb{D}$, $|h(z, s, t)| \leq |z|$
- Pour tout $z \in \mathbb{D}$ et $0 \leq s \leq t < +\infty$, $F_t(h(z, s, t)) = F_s(z)$

Comme $F_{n,+\infty}(\cdot, \cdot)$ est une chaîne de Loewner, il existe une fonction holomorphe injective $h_n(\cdot, s, t)$ sur \mathbb{D} qui vérifie $|h_n(z, s, t)| \leq |z|$ ainsi que $F_{n,+\infty}(h_n(z, s, t), t) =_{n,+\infty} (z, s)$.

Soit $0 \leq s \leq t < +\infty$. Par le lemme de Schwarz (lemme ??), son corollaire (lemme 5.1) et le théorème d'Arzelà-Ascoli, de manière similaire à ce que l'on vient de faire, on peut extraire de la suite $(h_{n,+\infty}(\cdot, s, t))$ une sous-suite $(h_{n_k}(\cdot, s, t))$ qui converge localement uniformément sur \mathbb{D} vers une fonction $h(\cdot, s, t)$.

Lorsque l'on fait tendre k vers $+\infty$, $h(\cdot, s, t)$ est holomorphe sur \mathbb{D} avec $|h(z, s, t)| \leq |z|$ et $F_t(h(z, s, t)) = F_s(z)$. Par le théorème de Hurwitz, $h(\cdot, s, t)$ est injective.

Ainsi $F(\cdot, \cdot)$ est bien une chaîne de Loewner. \square

5.7 Démonstration du théorème 5.16

La théorie utilisée par Loewner pour prouver le cas $n = 3$ de la conjecture de Bieberbach, repose sur un théorème assez technique. Nous allons à présent le démontrer :

Démonstration du théorème 5.16. L'équation (20) est une conséquence directe du lemme 5.17, comme le suggère la remarque 5.18.

Il nous faut à présent définir la fonction κ et montrer que $f(z, t)$ vérifie l'équation (19).

Pour tout $0 \leq s < t < +\infty$, on considère la fonction

$$h(z, s, t) := F^{-1}(F(z, s), t)$$

qui envoie de manière conforme \mathbb{D} sur $\mathbb{D} \setminus J_{st}$ où J_{st} est un arc de Jordan du disque unité. Comme $\mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_t$, $z \mapsto h(z, s, t)$ est bien définie.

On note B_{st} l'arc de cercle $|z| = 1$ dont l'image par h est J_{st} . On considère pour tout $t \in [0, +\infty[$, $\lambda(t) = F_t^{-1}(\gamma(t))$ l'extrémité de J_{st} qui est sur le disque unité \mathbb{D} . Alors $\lambda(s) \in B_{st}$ est un point de l'arc de cercle B_{st} . Cette situation est illustrée sur la figure 7.

Par le théorème de prolongement de Carathéodory (théorème 1.11), la fonction $w \mapsto g^{-1}(w, s)$ est continue jusqu'à Γ_s . Par conséquent, lorsque t décroît vers s , l'arc B_{st} se contracte sur le point $\lambda(s)$. De même lorsque s croît vers t , l'arc J_{st} se contracte sur $\lambda(t)$.

- Prolongeons la fonction $z \mapsto h(z, s, t)$ à $\mathbb{C} \setminus B_{st}$.

Par le théorème de prolongement de Carathéodory, h s'étend par continuité sur l'arc de cercle B_{st}^* défini par le complémentaire de B_{st} dans le cercle unité. L'image de B_{st}^* par h est donc le cercle unité privé de $\lambda(t)$.

Pour $|z| > 1$, on pose :

$$h(z, s, t) = \frac{1}{\overline{h(1/\bar{z}, s, t)}}$$

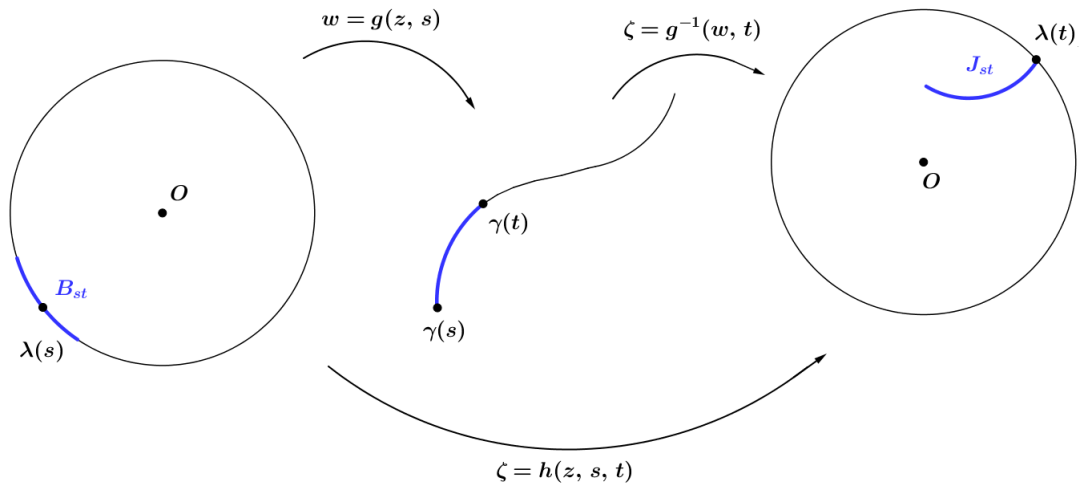


FIGURE 7 – Graphe de la fonction $h(\cdot, s, t)$

La fonction h ainsi prolongée est encore holomorphe d'après le principe du prolongement analytique et elle réalise un biholomorphisme entre le complémentaire de B_{st} et le complémentaire de $J_{st} \cup J_{st}^*$ où J_{st}^* désigne la réflexion de J_{st} à travers le cercle unité.

Comme la fonction $e^{t-s} h(\cdot, s, t) \in \mathcal{S}$, le théorème du quart de Koebe (théorème 5.23) implique que $h(\mathbb{D}, s, t) \subset \mathcal{D}(0, \frac{1}{4} e^{s-t})$. Par conséquent,

$$\inf\{|z| \mid z \in J_{st}\} \geq \frac{1}{4} e^{s-t}$$

c'est-à-dire l'arc J_{st} est en dehors du disque $\mathcal{D}(0, \frac{1}{4} e^{s-t})$. De la définition de J_{st}^* , on tire que

$$\sup\{|z| \mid z \in J_{st}^*\} \leq 4 e^{t-s}$$

c'est-à-dire que J_{st}^* est à l'intérieur du disque $\mathcal{D}(0, 4 e^{t-s})$. Par définition de h on a que

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{h(z, s, t)}{z} = e^{t-s}$$

Donc par réflexion on a

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{h(z, s, t)} = e^{t-s}$$

Ainsi par le principe du module maximum, on en déduit que

$$\left| \frac{h(z, s, t)}{z} \right| \leq 4e^{t-s}$$

sur le complémentaire de B_{st} .

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0, +\infty[$ telle que $(t_n)_n$ est décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = s$. Alors, comme on l'a déjà vu, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'arc de cercle B_{st_n} se contracte sur le point $\lambda(s)$.

En appliquant le théorème de Montel (théorème 1.5) à la famille $\left(\frac{h(z, s, t_n)}{z} \right)_n$, on en déduit qu'il existe une sous-suite qui converge uniformément sur les compacts ne contenant pas $\lambda(s)$ vers une fonction holomorphe bornée ϕ vérifiant $\phi(0) = 1$.

La fonction ϕ étant bornée au voisinage de $\lambda(s)$, elle se prolonge sur \mathbb{C} , on en déduit que $\phi \equiv 1$ par le théorème de Liouville.

La suite $(t_n)_n$ étant arbitraire, on en déduit que $\frac{h(z, s, t)}{z} \rightarrow 1$ uniformément sur les compacts de \mathbb{C} ne contenant pas $\lambda(s)$ lorsque $t \rightarrow s$.

Autrement dit $h(z, s, t) \rightarrow z$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}$ lorsque $t \rightarrow s$.

- Montrons que λ est continue.

Soit $s \geq 0$ fixé. Soit $\epsilon > 0$. Pour $t > s$ suffisamment proche de s ,

$$B_{st} \subset \{z \mid |z - \lambda(s)| < \epsilon\}.$$

L'image de \mathcal{C} par h , notée \mathcal{C}' , est un arc de Jordan qui contient $J_{st} \cup J_{st}^*$. En particulier, le point $\lambda(t)$ est à l'intérieur de \mathcal{C}' .

On vient de montrer que $h(z, s, t) \rightarrow z$ uniformément sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus \{\lambda(s)\}$ lorsque $t \rightarrow s$, on en déduit que le diamètre de \mathcal{C}' est inférieur à 3ϵ pour t suffisamment proche de s .

Soit $z_0 \in \mathcal{C}$, pour $t > s$ suffisamment proche de s on a donc :

$$\begin{aligned} |\lambda(s) - \lambda(t)| &\leq |\lambda(s) - z_0| + |z_0 - h(z_0)| + |h(z_0) - \lambda(t)| \\ &\leq \epsilon + \epsilon + 3\epsilon = 5\epsilon \end{aligned}$$

Ceci montre que λ est continue à droite. On procède de la même manière pour montrer que λ est continue à gauche.

Donc λ est une fonction continue.

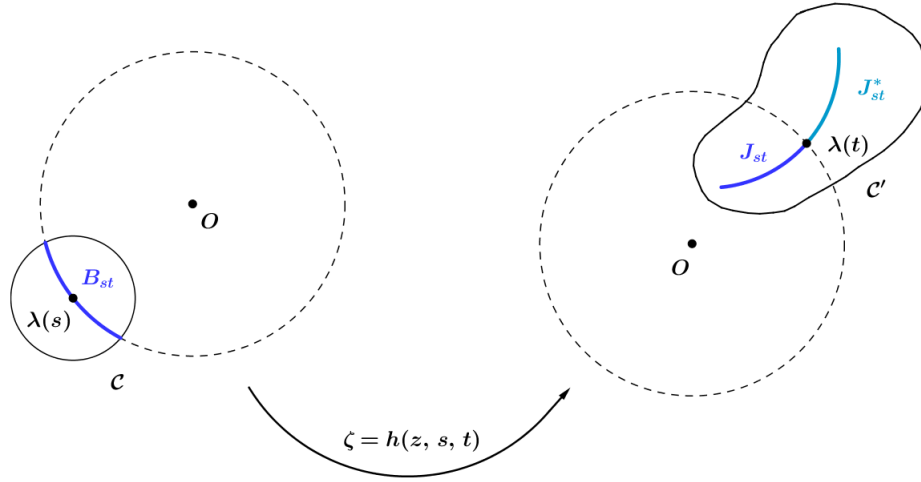


FIGURE 8 – Continuité de λ

- Établissons à présent l'équation de Loewner.

Comme la fonction $z \mapsto \frac{h(z, s, t)}{z}$ prolongée en $z = 0$ par e^{s-t} ne s'annule pas sur \mathbb{D} , on peut définir la fonction suivante :

$$\Phi_{st} : z \mapsto \log \left(\frac{h(z, s, t)}{z} \right)$$

le logarithme pour lequel $\Phi_{st}(0) = s - t$.

On remarque que Φ_{st} est holomorphe sur \mathbb{D} et continue sur $\overline{\mathbb{D}}$. De plus, on a $\Re(\Phi_{st}) < 0$ sur l'arc B_{st} et $\Re(\Phi_{st}) = 0$ sur B_{st}^* son complémentaire sur le cercle unité.

En effet, commençons par remarquer que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on a : $z = |z| e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\log(z) = \log(|z|) + i\theta$ et donc

$$\Re(\log(z)) = \log(|z|).$$

Comme $h(\cdot, s, t)$ envoie B_{st} sur $J_{st} \subset \mathbb{D}$, on en déduit que pour $z \in B_{st}$, $|z| = 1$ et $|h(z, s, t)| < 1$ donc $\Re(\Phi_{st}(z)) = \log \left(\left| \frac{h(z, s, t)}{z} \right| \right) < 0$

Par ailleurs, $h(\cdot, s, t)$ envoie B_{st}^* sur $\partial\mathbb{D}$, on en déduit que pour $z \in B_{st}^*$, on a $|z| = 1$ et $|h(z, s, t)| = 1$ donc $\Re(\Phi_{st}(z)) = 0$.

D'après la formule de Poisson – voir la preuve du lemme 5.2 – on a alors :

$$\Phi_{st}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \Re(\Phi_{st}(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta \quad (29)$$

où $e^{i\alpha}$ et $e^{i\beta}$ désignent les extrémités de B_{st} . En particulier, on a :

$$s - t = \Phi_{st}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \Re(\Phi_{st}(e^{i\theta})) d\theta. \quad (30)$$

En reprenant la définition de la fonction h , on a pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$h(f(z, s), s, t) = f(z, t).$$

Donc en remplaçant z par $f(z, s)$ dans la formule (29) et par définition de Φ_{st} , on obtient :

$$\Phi_{st}(f(z, s)) = \log \frac{f(z, t)}{f(z, s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \Re(\Phi_{st}(e^{i\theta})) \frac{e^{i\theta} + f(z, s)}{e^{i\theta} - f(z, s)} d\theta$$

On va à présent avoir besoin du résultat élémentaire suivant.

Proposition 5.28 (Théorème de la moyenne). *Soit f et g deux fonctions à valeurs réelles, continues sur un segment $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que $f \geq 0$ (ou plus généralement que f garde un signe constant sur $[a, b]$). Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$g(c) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Le théorème de la moyenne, appliquée séparément à la partie réelle et la partie imaginaire du second membre donne :

$$\log \frac{f(z, t)}{f(z, s)} = \frac{1}{2\pi} \left[\Re \left(\frac{e^{i\sigma} + f(z, s)}{e^{i\sigma} - f(z, s)} \right) + i \Im \left(\frac{e^{i\tau} + f(z, s)}{e^{i\tau} - f(z, s)} \right) \right] \int_{\alpha}^{\beta} \Re(\Phi_{st}(e^{i\theta})) d\theta$$

où $e^{i\sigma}$ et $e^{i\tau}$ sont des points de l'arc de cercle B_{st} .

En utilisant la formule (30), on a :

$$\log \frac{f(z, t)}{f(z, s)} = (s - t) \left[\Re \left(\frac{e^{i\sigma} + f(z, s)}{e^{i\sigma} - f(z, s)} \right) + i \Im \left(\frac{e^{i\tau} + f(z, s)}{e^{i\tau} - f(z, s)} \right) \right]$$

Or on a vu que si $t \rightarrow s$ en décroissant, l'arc B_{st} se contracte sur le point $\lambda(s)$. On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial s} (\log f(z, s)) = - \frac{\lambda(s) + f(z, s)}{\lambda(s) - f(z, s)} \quad (31)$$

En posant $\kappa(t) := \frac{1}{\lambda(t)}$ on obtient l'équation (19) :

$$\frac{\partial f}{\partial s}(z, s) = -f(z, s) \frac{1 + \kappa(s) f(z, s)}{1 - \kappa(s) f(z, s)}$$

En effet, λ est continue et $|\lambda(t)| = 1$ pour tout $0 \leq t < +\infty$ car par définition $\lambda(t)$ est un point du cercle unité.

Donc κ vérifie clairement les mêmes propriétés. Ceci achève la démonstration du théorème 5.16. \square

Conclusion

Les deux premiers cas de la conjecture de Bieberbach ont été traités ici, avec des méthodes totalement différentes. La méthode utilisée pour le cas $n = 2$ ne semble pas constituer une méthode générale pour résoudre la conjecture, contrairement à la méthode de Loewner. En effet, par la théorie de Loewner, on a obtenu une formule explicite pour les coefficients a_n , on imagine donc pouvoir appliquer la même méthode aux cas supérieurs. Cependant, elle fait intervenir des intégrales multiples et devient très vite fastidieuse lorsque n est grand. D'autres méthodes ont été développées pour les cas supérieurs tels que $n = 4, 5$ ou 6 . Ce n'est que plus tard que Nehari parvint à montrer le cas $n = 4$ grâce à la méthode de Loewner.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Hugues Auvray pour l'aide qu'il m'a apportée tout au long de l'encadrement de ce projet. Les précieux conseils et les corrections attentives qu'il a apporté à ce mémoire m'ont permis d'améliorer mes connaissances ainsi que mes compétences de rédaction.

Je remercie également Jiandi Zou pour notre collaboration pendant ce projet, à deux nous avons pu fournir un travail complet.

Merci également à Alann pour sa relecture du mémoire, ses conseils et son soutien au quotidien.

Références

- [1] Albert Baernstein II. Bieberbach's Conjecture for Tourists. In *Harmonic Analysis*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 908, p. 48-7. Springer, Berlin, Heidelberg, 1982.
- [2] Albert Baernstein II. *Integral Means, Univalent Functions and Circular Symmetrization*. Acta Mathematica 133, p. 139-169. Washington University, St. Louis, 1974.
- [3] Peter L. Duren. *Univalent Functions*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol. 259. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] Christian Pommerenke & Gerd Jensen. *Univalent Functions*. Studia mathematica : Mathematische Lehrbücher, Vol. 25. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [5] Paul Zorn. The Bieberbach Conjecture. *Mathematics Magazine*, Vol. 59, No. 3, p. 131-148. Juin 1986.
- [6] Eric Amar & Etienne Matheron. *Analyse Complexe*. Cassini, Paris, 2004.
- [7] Barry Simon. *Basic Complex Analysis*. A comprehensive Course in Analysis, Part 2A. American Mathematical Society, Rhode Island, 2015.
- [8] Barry Simon. *Advanced Complex Analysis*. A comprehensive Course in Analysis, Part 2B. American Mathematical Society, Rhode Island, 2015.