Emerks - Septembre 2018

O. Biquard - Métriques kählériennes Ricci-plates à croissance de volume euclidienne

(M, g) Kähler, $Ric = 0$, ALE $\left(\underset{asymp}{\simeq} \mathbb{C}^n/\Gamma, \ \Gamma \subset U(n) \right)$

$\mathrm{Vol}\, B(x_0, r) \sim C r^{2n}$ crssce euc^{ne}

Que dire si on n'impose pas ALE (mais que la crssce euc^{ne} est maintenue) ?

ns cône asymptotique : $\lim\limits_{t \to 0}^{GH} (M, tg)$.

en gén^{al}, c'est un cône métrique sur un espace de longueurs (Cheeger-Colding).

(cf. aussi Cheeger-Tian, avec l'hyp. $Rm = O(1/r^2)$).

Construction élémentaire de cône Ricci-plat :

D^{n-1} cpcte, KE, scal > 0

$L \to D$ fibré en dtes holo.

$K_D = \lambda L \quad \lambda > 0$

sur l'espace total de $L|D$:

$\omega = i \partial \bar\partial |z|^{2\lambda/n}$ métrique RFK, cône.

. Thm (Tian-Yau '91) :

$\bar X = X \cup \underset{\text{diviseur lisse}}{D}$ (pts orbifolds possibles)

On suppose : $K_{\bar X} + \beta D = 0$, $\beta > 1$, et

D KE à scal > 0.

Alors : X admet une métrique RFK,

. cplète ;
. à croissance du volume euc$^{\text{ne}}$;
. à $Rm = O(r^{-2})$.

<u>Idée</u> : $K_D = K_{\bar X} + D = -\underbrace{(\beta-1)}_{>0} D$

$D = [\sigma]$ pot$^{\text{el}}$ $\rho \sim |\sigma|^{-2\frac{\beta-1}{n}}$ ("ansatz de TY")

⇝ métrique approx

⇝ on résout MA avec le cptm^{t} asympt^{q}.

<u>ex</u> : • Stenzel (93) :

topo^{t} : $(S^n)_{\mathbb C} \sim T^*S^n$, etc

ODE

métriques sur les espaces de rg 1 cplxifiés $(S^n)_{\mathbb C}$, $(\mathbb{CP}^n)_{\mathbb C}$, $(\mathbb{HP}^n)_{\mathbb C}$, $(\mathbb{O}\mathbb{H}^2)_{\mathbb C}$ asymptotiquem^{t} coniques (AC)

cpct $\to G/K$ ⇝ $G^{\mathbb C}/K^{\mathbb C}$

$\mathbb{CP}^n = SU(n+1)/S(U(1)\times U(n))$ ⇝ $Sl(n+1,\mathbb C)/S(Gl(1,\mathbb C)\times Gl(n,\mathbb C))$

• B. ('96) : métriques hyperkählériennes sur $T^*(G/P)$ ← espace de drapeaux (cplx)

technique de th$^{\text{ie}}$ de jauge

B. - Gauduchon ('96) : formules explicites si G/P = espace herm$^{\text{en}}$ sym^{q}

AC, mais en général le cône est singulier

. Joyce (2000) : ALE, QALE sur $\mathbb{C}^n/\Gamma$, $\Gamma \subset U(n)$

. Conlon-Hein (2013-15) : métriques AC, cône lisse

. Li - Conlon-Degeratu-Conlon, Székelyhidi

exemples de métriques AC, cône non lisse

Δ_3. KRF sur $\mathbb{C}^n$, avec cône asympt^q : $\mathbb{C}^{n-2} \times (\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_k)$

Travail commun avec Th. Delcroix :

<u>Q</u> : G/K esp. symétrique de type cpct -

$\exists$? métrique RFK, AC, sur $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$?

Réponse attendue : il pt en exister $r = rg(G/K)$ différentes

<u>. Thm (B. - Delcroix)</u> :

X espace symétrique cplxifié de rg 2

1) $X = SO(n,\mathbb{C}) / S(O(2) \times O(n-2), \mathbb{C})$, $SO(8)/Gl(4)$, $Sl(5)/S(Gl(2) \times Gl(3))$

a deux métriques RFK

(une lisK + 1 nouvelle) ;

2) $X = SO_5 \times SO_5 / SO_5$. $Sp_8 / Sp_2 \times Sp_4$, G_2/SO_4, $G_2 \times G_2 / G_2$:

une nouvelle mét^q RFK (et pas de 2^e mét^q pr les 2 derniers) ;

3) $Sl(3)/SO(3)$

<u>1er ingrédient</u> : compactification magnifique

("wonderful cptification") de De Concini - Procesi

$$\bar{X} = X \cup \underbrace{D_1 \cup D_2}_{s.n.c.}$$

<u>$\hookrightarrow$ ex</u> : $X = Sl(n,\mathbb{C}) / S(Gl(2,\mathbb{C}) \times Gl(n-2,\mathbb{C}))$

$$= \text{orbite coadj. de } \left(\begin{array}{cc|ccc} 1/2 & & & * & \\ & 1/2 & & & \\ \hline & & -\frac{1}{n-2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\frac{1}{n-2} \end{array}\right) \text{ ds } \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$$

$X \hookrightarrow \mathbb{P}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = \mathbb{P}^{n^2-2}$

$\tilde{X} = X \cup D$,

$D = \mathbb{P}\{\text{matrices } A, \ rg A \quad , A^2 = 0\}$

$rg A = 2$: partie lisse - $rg A = 1$: sing^{té}

Biquard (2/2)

1) Fano, sing^{ie}, KE

la mét^{q} hK sur X a pour cône asympt^{q}

$\mathcal{C} = \{$ matrices A, rg $A \leq 2$, $A^2 = 0\}$

$= \overline{\text{orbite nilpotente}}$

autre compactific^{o} :

$X = \{(P,Q) \in Gr_{2,n} \times Gr_{n-2,n},\ P \cap Q = 0\}$

$\hookrightarrow Gr_{2,n} \times Gr_{n-2,n}$

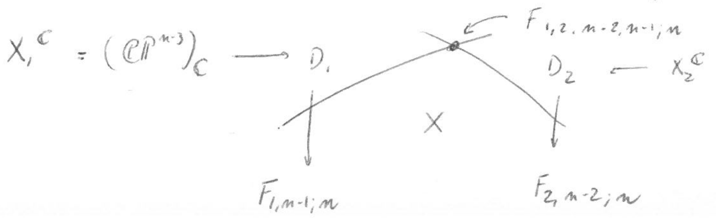
$\hat{X} = X \cup D'$, $D' = \{(P,Q),\ P \cap Q \neq 0\}$

$)' \to F_{1,n-1;n}$
$P,Q) \mapsto (P \cap Q, P+Q)$

deux strates : . dim $P \cap Q = 1$: libre

. $P \subset Q$: sing^{ie}

à pst : $X \hookrightarrow \mathbb{P}^{n^2-2} \times (Gr_{2,n} \times Gr_{n-2,n})$



Ensuite : . on choisit un deux diviseurs, D_2 pour ex. ;

. mét^{q} KE sur $D_2^{\vee}$ (D_2 contracté) ;

. potentiel asympt^{q} :

$r^2 + r^{2\gamma} \rho_{X_1}$, $\gamma < 1$

. on résout MA (Hein)

On contourne les difficultés qui apparaissent :

. en utilisant une gén^{o} de la géom^{ie} tor^{q} pr la mét^{q} de KE (travaux de Delcroix).

. géométrie à l'∞ : si $\gamma \geq 0$, OK (si $\gamma < 0$, $|Rm| \to \infty$, inj $\to 0$ cas exclus du thm)