EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 2-bis

13 juin 2016

Exercice 1 [7 points]

(a) On considère une suite d'évènements (A_n) dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$. [2]
Avec $X_n = \mathbb{1}_{A_n}$, à quelle(s) condition(s) la suite (X_n) converge vers $X = 0$,

1. en probabilité ?
2. presque sûrement ?

Solution :
Soit $\varepsilon \in]0,1[$.

1. $\mathrm{P}(|X_n - 0| > \varepsilon) = \mathrm{P}(X_n = 1)$ car $X_n \geq 0$ et $X_n \in \{0,1\}$.
   Or $X_n(\omega) = 1 \Leftrightarrow \omega \in A_n$, ce qui implique $\mathrm{P}(X_n = 1) = \mathrm{P}(A_n)$.
   La condition s'écrit donc $\mathrm{P}(A_n) \longrightarrow 0$.
2. $\mathrm{P}(\sup_{m \geq n} |X_m - 0| > \varepsilon) = \mathrm{P}(\sup_{m\geq n} X_m = 1) = \mathrm{P}(\exists m \geq n \,/\, \omega \in A_m)$.
   Donc la condition s'écrit $\mathrm{P}(\underline{\lim} \bar{A}_n) = 1$, ou encore $\mathrm{P}(\overline{\lim} A_n) = 0$.

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

(b) Étudier la convergence de la suite de variables aléatoires (X_n) définie par [3]
$X_n = \max_{1 \leq i \leq n} U_i$, d'abord en loi puis en moyenne quadratique.

Solution :
On commence par déterminer la fonction de répartition. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{P}(X_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0\,, \\ \mathrm{P}\left(\max\limits_{1 \leq i \leq n} U_i \leq x\right) = \mathrm{P}\left(\forall i \in [\![1,n]\!]\, U_i \leq x\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad = x^n \text{ si } x \in [0,1] \\ 1 \text{ si } x > 1\,, \end{cases}$$

par hypothèse sur les U_i (iid.).

Sur $[0,1]$, $F_{X_n}(x) = x^n$ converge ponctuellement vers la fonction égale à 0 partout sauf en 1. Donc F_{X_n} converge ponctuellement vers $\mathbb{1}_{x \geq 1}$, continue à droite en 1 et fonction de répartition de la variable aléatoire $X = 1$. On en déduit que X_n converge en loi vers $X = 1$.

On a besoin de la fonction de densité : $f_{X_n}(x) = \frac{d}{dx}\mathrm{P}(X_n \leq x) = nx^{n-1}\mathbb{1}_{x\in[0,1]}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X_n-1)^2] &= \int_0^1 (x-1)^2 nx^{n-1}dx \text{ (théorème de transfert)} \\
&= n\left[\int_0^1 x^{n+1}dx - 2\int_0^1 x^n dx + \int_0^1 x^{n-1}dx\right] \\
&= n\left[\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n}\right] = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \longrightarrow 0\,.
\end{aligned}$$

Il y a donc convergence en moyenne quadratique.

(c) Soit $\alpha > 0$. Montrer que la suite (X_n) définie par $X_n = (U_1\times\cdots\times U_n)^{\frac{\alpha}{n}} = (\prod_{i=1}^n U_i)^{\frac{\alpha}{n}}$ converge presque sûrement et donner sa limite. *Indication : s'intéresser à* $\ln X_n$. [2]

Bonus : Montrer que la suite (Y_n) *définie par* $Y_n = (X_n e^{\alpha})^{\sqrt{n}}$ *converge en loi et déterminer la loi limite.*

Solution :
On pose $W_n = \ln X_n = \alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln U_i$. Les variables aléatoires $\ln U_i$ sont iid. car les U_i le sont. Alors d'après la loi forte des grands nombres W_n converge presque sûrement vers $\alpha\mathrm{E}[\ln U_1]$ (on vérifiera $\mathrm{E}[\ln^2 U_1] < +\infty$ plus bas).

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\ln U_i] &= \int_0^1 \ln x dx \text{ (théorème de transfert)} \\
&= [x\ln x - x]_0^1 \text{ (dériver } x\ln x) \\
&= -1 \text{ (car } x\ln x \longrightarrow 0 \text{ en } 0^+)
\end{aligned}$$

Finalement, d'après le continuous mapping theorem (la fonction $x \mapsto e^x$ étant continue) $X_n = e^{W_n}$ converge presque sûrement vers la constante $e^{-\alpha}$.

Ensuite, posons $Z_n = \ln Y_n$. On obtient avec $\mu = -1$:

$$Z_n = \alpha\frac{\sum_{i=1}^n \ln U_i - n\mu}{\sqrt{n}}\,,$$

ce qui correspond à l'expression approximée par la loi $\mathcal{N}(0,1)$ dans le théorème central limite (TCL), à un facteur σ près. Déterminons ce facteur :

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \mathrm{E}[\ln^2 U_1] - \mathrm{E}[\ln U_1]^2 \\
&= \int_0^1 \ln^2 x dx - 1 \text{ (théorème de transfert)} \\
&= [x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x]_0^1 - 1 \text{ (dériver } x\ln^2 x) \\
&= 2 - 1 = 1
\end{aligned}$$

On conclut alors en appliquant le TCL + continuous mapping theorem :
$Y_n = e^{Z_n}$ converge en loi vers $\mathcal{LN}(0, \alpha^2)$.

Exercice 2 [3 points]

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires où chaque X_n suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p_n)$ avec $p_n \longrightarrow 0$. On suppose que $a_n p_n \longrightarrow \lambda \in]0, +\infty[$ pour une suite (a_n) de réels strictement positifs. Montrer que $\frac{X_n}{a_n}$ converge en loi, et déterminer la loi limite.

Solution :
On pose $Y_n = \frac{X_n}{a_n}$. On a $\mathrm{P}(Y_n < 0) = \mathrm{P}(X_n < 0) = 0$ par définition de la loi géométrique. Soit alors $x \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y_n \leq x) &= \mathrm{P}(X_n \leq a_n x) \\
&= \mathrm{P}(X_n \leq \lfloor a_n x \rfloor) \text{ (car Xn est à valeurs entières)} \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_n > \lfloor a_n x \rfloor) \\
&= 1 - (1 - p_n)^{\lfloor a_n x \rfloor}.
\end{aligned}$$

$a_n x - 1 < \lfloor a_n x \rfloor < a_n x + 1$, donc $p_n \lfloor a_n x \rfloor \longrightarrow \lambda x$ (théorème des gendarmes). On en déduit d'après la propriété rappelée au tableau que $\mathrm{P}(Y_n \leq x)$ converge vers $1 - e^{-\lambda x}$, qui n'est autre que la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
Ainsi, $\frac{X_n}{a_n}$ a pour loi limite $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 3 [4 points]

Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire deux successivement avec remise, obtenant les numéros N_1 et N_2. On note alors $X = \min(N_1, N_2)$ et $Y = \max(N_1, N_2)$.

(a) Trouver la loi du couple (X, Y). Vérifier que la somme des probabilités vaut 1. [2]

Solution :
On commence par remarquer que (X, Y) a pour support l'ensemble des couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ vérifiant $i \leq j$. Notons E cet ensemble, et $D \subset E$ l'ensemble des couples "doubles" du type (k, k). Soit alors $(k, \ell) \in E$. Si $k = \ell$ il n'y a qu'un seul tirage menant à $(X, Y) = (k, \ell)$: $N_1 = N_2 = k$. Sinon, il y exactement deux tirages menant à $(X, Y) = (k, \ell)$ sur les n^2 possibles : $(N_1, N_2) = (k, \ell)$ ou

$(N_1, N_2) = (\ell, k)$. On en déduit la loi du couple :

$$\mathrm{P}((X,Y) = (k,\ell)) = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2} \text{ si } k = \ell\,, \\ \dfrac{2}{n^2} \text{ si } (k,\ell) \in E \setminus D\,, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie alors $\sum_{(k,\ell)\in E} = \frac{\#D}{n^2} + 2\frac{\#E\setminus D}{n^2} = \frac{1}{n} + 2\frac{n(n-1)}{2n^2} = 1$.

(b) Calculer les lois marginales de X et Y. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ? [2]

Solution :
Loi marginale de X :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = k \in [\![1,n]\!]) &= \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{P}((X,Y) = (k,\ell)) \\ &= \mathrm{P}((X,Y) = (k,k)) + \sum_{\ell=k+1}^{n} \mathrm{P}((X,Y) = (k,\ell)) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2(n-k)}{n^2} = \frac{2n-(2k-1)}{n^2} \end{aligned}$$

Loi marginale de Y :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y = \ell \in [\![1,n]\!]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}((X,Y) = (k,\ell)) \\ &= \mathrm{P}((X,Y) = (\ell,\ell)) + \sum_{k=1}^{\ell-1} \mathrm{P}((X,Y) = (k,\ell)) \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{2(\ell-1)}{n^2} = \frac{2\ell-1}{n^2} \end{aligned}$$

$\mathrm{P}((X,Y) = (n,1)) = 0 \neq \frac{1}{n^4} = \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = 1)$,
donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 [6 points]

On définit un couple (X,Y) de variables aléatoires de densité de probabilité f :

$$\begin{cases} f(x,y) = \alpha e^{-y} \text{ si } x \in [0,1] \text{ et } y \in [x, +\infty[\\ \qquad 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(**a**) Calculer les densités marginales f_X et f_Y respectivement de X et Y en fonction de α. En déduire la valeur de la constante α. X et Y sont-elles indépendantes ? [2]

Solution :

Soient $x \in [0,1]$ et $y \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{y=x}^{+\infty} f(x,y)dy \\ &= \alpha \int_{y=x}^{+\infty} e^{-y} dy \\ &= \alpha e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{x=0}^{\min(1,y)} f(x,y)dx \\ &= \alpha \min(1,y) e^{-y} \end{aligned}$$

f_X étant une densité de probabilité on doit vérifier $\alpha \int_{x=0}^{1} e^{-x}dx = 1$, soit $\alpha = \frac{e}{e-1}$.
On peut alors double-checker le calcul en évaluant
$\int_{y=0}^{+\infty} \min(1,y)e^{-y}dy = -e^{-1} + (1-e^{-1}) + e^{-1} = \frac{1}{\alpha}$.

X et Y ne sont pas indépendantes car $f(2,1) = 0 \neq \alpha^2 e^{-3} = f_X(2)f_Y(1)$.

(**b**) Déterminer la densité de $Z = Y - X$. Quelle loi (connue) suit Z ? [2]

Solution :

Soit $z \in \mathbb{R}$. On calcule $\mathrm{P}(Z \leq z)$. Si $z < 0$ cette probabilité vaut 0 car
$\mathrm{P}(Z < 0) = \mathrm{P}(X > Y) = 0$. On peut donc supposer $z \in [0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(Y - X \leq z) &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{+\infty} \mathbb{1}_{y-x\leq z} f(x,y)dxdy \\ &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{x+z} f(x,y)dxdy \\ &= \alpha \int_{0}^{1} (e^{-x} - e^{-(x+z)})dx \\ &= \alpha(1 - e^{-1} - e^{-z} + e^{-(1+z)}) \\ &= \alpha(1-e^{-1})(1-e^{-z}) = (1-e^{-z}) \end{aligned}$$

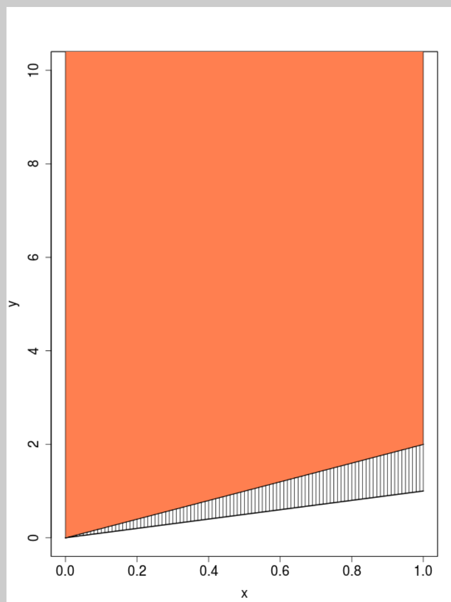
Donc $F_Z(z) = (1-e^{-z}))\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$, puis $f_Z(z) = e^{-z}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(z)$. On reconnaît la densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

(**c**) Calculer $\mathrm{P}(Y \geq \beta X)$ pour $\beta \geq 1$. Dessiner le domaine d'intégration avec $\beta = 2$. [2]

Solution :

Commandes R pour le tracé du domaine d'intégration (en couleur) :

```
#png("domaine_integration.png", width=600, height=800)
plot(function(x) (x), xlim=c(0,1), ylim=c(0,10), lwd=2,
  xlab="x", ylab="y", cex.lab=1.5, cex.axis=1.5)
par(new=TRUE)
plot(function(x) (2*x), xlim=c(0,1), ylim=c(0,10), lwd=2,
  xlab="", ylab="", xaxt="n", yaxt="n")
polygon(x = c(0,1,1,0), y=c(0,2,100,100), col="coral")
s = seq(0,1,0.01)
segments(x0=s, y0=s, x1=s, y1=2*s)
#dev.off()
```



Calcul :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y \geq \beta X) &= \int_{x=0}^{1} \int_{y=\beta x}^{+\infty} f(x,y) dx dy \\
&= \alpha \int_{x=0}^{1} \int_{y=\beta x}^{+\infty} e^{-y} dx dy \\
&= \alpha \int_{0}^{1} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta}) \\
&= \frac{1}{\beta} \frac{1 - e^{-\beta}}{1 - e^{-1}}
\end{aligned}$$

On trouve 1 pour $\beta = 1$, comme attendu.