EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 1-bis

10 mai 2016

Exercice 1 [5 points]

(a) Montrer les propriétés suivantes quand elles sont vraies ; dans le cas contraire, construire un contre-exemple. [3]

1. $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(\bar{A}|B) = 1$
2. $\mathrm{P}(A|B) + \mathrm{P}(A|\bar{B}) = 1$
3. $\mathrm{P}(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$

(b) L'étudiant X vient en TD deux fois sur trois ; quand il vient il arrive une fois sur deux à l'heure, les autres fois il a au moins vingt minutes de retard. Il est 8h40, le TD commence à 8h30. Quelle chance a le professeur de voir encore arriver X ? [2]

Exercice 2 [5 points]

Considérons deux boîtes identiques A et B dont l'une contient deux fois plus de pièces d'or que l'autre, mais vous ignorez laquelle. La situation est donc totalement symétrique.

Notons n le nombre de pièces d'or dans la boîte A ; alors la boîte B en contient soit $2n$, soit $\frac{n}{2}$ avec à chaque fois une probabilité de $\frac{1}{2}$. On peut donc déterminer combien de pièces d'or se trouvent dans la boîte B en moyenne.

(a) Que donne le calcul suggéré par l'analyse en italique ? Pourquoi y a-t-il un problème ? [1]

(b) Définir un espace probabilisé adéquat pour cette expérience, puis exprimer X la variable aléatoire donnant le nombre de pièces d'or dans la boîte B. Calculer alors son espérance ; est-ce conforme à l'intuition ? [4]

Rappel :

- Formule des probabilités totales : $\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(A|B_i)\mathrm{P}(B_i)$
- Formule de Bayes : $\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(B|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)}$

Exercice 3 [5 points]

On jette 2 dés. Soient X la variable aléatoire égale au plus petit des deux nombres obtenus, Y la variable aléatoire égale au plus grand des deux, et Z la différence en valeur absolue des points obtenus.

(**a**) Déterminer la loi de X. Tracer sa fonction de répartition (renormaliser les valeurs). [2]

(**b**) Déterminer la loi de Z (c'est-à-dire les $\mathrm{P}(Z = k)$). [1]

(**c**) Calculer l'espérance et la variance de X [2]

Exercice 4 [5 points]

Soient X une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et ε une variable aléatoire discrète indépendante de X telle que $\mathrm{P}(\varepsilon = 1) = \mathrm{P}(\varepsilon = -1) = \frac{1}{2}$. Déterminer la densité de $Y = \varepsilon X$, son espérance mathématique et sa variance.
(Cette loi est appelée loi exponentielle symétrique.)

Rappel :

- Loi exponentielle : $X \sim \mathcal{E}(\lambda) \Rightarrow f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
- Somme des k^i :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$