EI-SE3 / Probabilités / Contrôle 1

3 mai 2016

Exercice 1 [5 points]

Une population comporte 60% de femmes et 40% d'hommes. On sait par ailleurs que 10% des hommes ont les cheveux longs et que 40% des femmes ont les cheveux courts.

Une personne se présente avec les cheveux longs. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femme ?

Solution :
Notons L l'évènement "avoir des cheveux longs" et F l'évènement "être une femme". On considère que "ne pas avoir les cheveux longs" équivaut à "avoir les cheveux courts" (sinon il manque des données dans l'énoncé). Alors la probabilité recherchée s'écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F|L) &= \frac{\mathrm{P}(L|F)\mathrm{P}(F)}{\mathrm{P}(L)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(L|F)\mathrm{P}(F)}{\mathrm{P}(L|F)\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(L|\bar{F})\mathrm{P}(\bar{F})} \\
&= \frac{0.6^2}{0.6^2 + 0.1 \times 0.4} \\
&= 0.9\,,
\end{aligned}$$

en appliquant successivement la formule de Bayes puis la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{F, \bar{F}\}$.

Exercice 2 [5 points]

On répartit n livres sur r étagères d'une bibliothèque.
Déterminer un espace Ω, puis une tribu et une loi de probabilité appropriés.
Calculer alors la probabilité que toutes les étagères soient occupées.

Solution :
$\Omega = [\![1, r]\!]^n$: pour chaque livre on choisit un numéro d'étagère. Ω est fini et l'énoncé ne suggère pas d'écarter certaines configurations, donc on choisit $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, sans indications supplémentaires on conclut à l'équiprobabilité : $\mathrm{P}(\omega \in \Omega) = \frac{1}{\#\Omega}$.

Si $n < r$, la probabilité demandée vaut 0 car un livre occupe au plus une étagère. Supposons donc $n \geq r$, et comptons le nombre de façons de répartir les livres pour occuper toutes les étagères. Il faut d'abord placer un livre sur chaque étagère : il y a A_n^r telles configurations (choisir r éléments parmi n avec ordre ; on peut aussi le voir comme un choix de r éléments parmi n sans ordre, puis multiplier par le nombre de permutations à r éléments : $A_n^r = C_n^r \times r!$). On est alors ramené à compter le nombre de façons de poser sans contraintes $n - r$ livres sur r étagères. Pour chacun des $n - r$ livres on choisit un numéro d'étagère entre 1 et r : il y a donc r^{n-r} tels placements. Par définition de Ω, $\#\Omega = r^n$. On en déduit finalement la probabilité demandée :

$$P(n, r) = \frac{A_n^r \times r^{n-r}}{r^n} = \frac{n!}{(n-r)!r^r}.$$

Attention : solution fausse. Voir par exemple cette page ou encore celle-ci.
Bonus de 5 points sur le contrôle pour compenser cette erreur.

Exercice 3 [5 points]

Le prix d'un ticket de tramway est de 1 euro et celui d'une amende est de 40 euros. La probabilité qu'un voyageur soit controlé lors d'un trajet est p. On désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de contrôles d'un voyageur lors de N trajets.

(a) Déterminer la loi de X (c'est-à-dire les $\mathrm{P}(X = k)$), puis calculez son espérance. [3]

Solution :
On reconnaît la somme de N variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernouilli, de paramètre p. X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N, p)$:
$\mathrm{P}(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \sum_{k=0}^{N} k \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= Np \sum_{k=1}^{N} \binom{N-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{N-1-(k-1)} \\ &= Np(p + 1 - p)^{N-1} \text{ (binôme de newton)} \\ &= Np \end{aligned}$$

(b) Un voyageur envisage de ne jamais acheter de ticket ; soit Y la variable aléatoire de son gain relatif après N trajets. Exprimez Y puis calculez son espérance. En [2] déduire la probabilité p de contrôle nécessaire pour dissuader de frauder.

Solution :

$$Y = -40X + N\,.$$

Alors $\mathrm{E}[Y] = -40\mathrm{E}[X] + N = N(-40p+1)$; on en déduit qu'il faut choisir $p \geq \frac{1}{40}$.

Exercice 4 [5 points]

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Calculer la loi de $X+Y$, puis reconnaitre celle de X sachant $X+Y=n$.

Solution :

Si X et Y suivent des lois de Poisson indépendantes de paramètres respectifs λ et μ, alors $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (cf. cours ou TD). On retrouve ce résultat

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X+Y=n) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(X+Y=n|X=k)\mathrm{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(Y=n-k)\mathrm{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!} (\lambda+\mu)^n
\end{aligned}$$

en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet $(X=k)_{k=0,\ldots,n}$, ainsi que la formule du binôme de Newton.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On utilise la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=k|X+Y=n) &= \frac{\mathrm{P}(X+Y=n|X=k)\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(Y=n-k)\mathrm{P}(X=k)}{\mathrm{P}(X+Y=n)} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}\lambda^k \mu^{n-k} n!}{k!(n-k)! e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}.
\end{aligned}$$

On reconnaît la loi binomiale de paramètre $p = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$: $X|X+Y=n \sim \mathcal{B}(n,p)$.