Mini contrôles continus

Benjamin Auder

May 13, 2015

Menu

4 x 5 points : 2 cours + 3 exercice.
Une feuille simple suffit

CC 1 - séance 1

CC 2 - séance 2

CC 3 - séance 3

CC 4 - séance 4

CC 1 - bases des probabilités

Cours

Définition d'une probabilité (axiomes de Kolmogorov)

Exercice

Alice, Bob et Camille lancent à tour de rôle un dé à 6 faces non équilibré : la probabilité d'obtenir un 6 vaut respectivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Le joueur obtenant le plus grand nombre gagne, puis on recommence.

Un observateur arrive au N^{eme} lancer de dé, N étant choisi aléatoirement dans $[\![1, 99]\!]$. Un 6 est obtenu. Quelle est la probabilité qu'Alice ait lancé le dé ?

Corrigé

Énoncé : $\mathrm{P}(6|A) = \frac{1}{3}, \mathrm{P}(6|B) = \frac{1}{4}, \mathrm{P}(6|C) = \frac{1}{2}$.
L'observateur arrive à un instant aléatoire, donc 33 cas favorables pour A, B et C
$\Rightarrow \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{3}$.

$\mathrm{P}(A|6) = \frac{\mathrm{P}(6|A)\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(6)}$ (formule de Bayes)
$\mathrm{P}(6) = \mathrm{P}(6|A)\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(6|B)\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(6|C)\mathrm{P}(C)$ (probabilités totales)

$\Rightarrow \mathrm{P}(A|6) = \frac{4}{13}$

CC 2 - variables aléatoires

Cours

Définition de l'indépendance d'une famille de VAr.

Exercice

Alice, Bob et Camille lancent à tour de rôle un dé à 6 faces non équilibré : la probabilité d'obtenir un 6 vaut respectivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$ (les autres cas étant équiprobables). Si un joueur obtient un nombre plus grand que ceux des deux autres protagonistes il gagne 1 point ; puis on recommence.

Déterminer la loi puis calculer l'espérance du nombre de points obtenus par Alice en $N = 400$ tours.

Corrigé

La probabilité de gain d'Alice est la même à chaque tour (indépendance) $\Rightarrow$ somme de $N = 400$ VA de Bernouilli de paramètre p. Que vaut p ?

Soient A, B, C les VA "résultats des lancers".

$$\begin{aligned}
p &= \mathrm{P}(A > B \cap A > C) \text{ attention : pas indépendants} \\
&= \textstyle\sum_{a=1}^{6} \mathrm{P}(B < a)\mathrm{P}(C < a)\mathrm{P}(A = a) \\
&= \mathrm{P}(A = 6)\mathrm{P}(B < 6)\mathrm{P}(C < 6) \\
&\quad + \textstyle\sum_{a=1}^{5} \mathrm{P}(B < a)\mathrm{P}(C < a)\mathrm{P}(A = a | A \neq 6)\mathrm{P}(A \neq 6) \\
&= \tfrac{37}{200} \text{ après calculs}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Gain $\sim \mathcal{B}(400, \frac{37}{200})$; espérance $= 74$

CC 3 - séance 3

Cours

Expression de la fonction caractéristique,
lien avec les moments

Exercice

n personnes sautent en parachute. Leurs temps de descente X_n sont indépendants, et suivent une loi normale de mêmes paramètres : $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Déterminer la loi de $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
Y_n converge-t-elle ? Vers quelle VA ?

Corrigé

F_X, G_n fonctions de répartition de X_k, Y_n.

$$\begin{aligned} G_n(x) &= \mathrm{P}(X_1 \leq x \cap \cdots \cap X_n \leq x) \\ &= (F_X(x))^n \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G_n(x)$ converge vers 0.
$\Rightarrow G_n$ ne converge pas ponctuellement vers une fonction de répartition. On n'a donc pas convergence en loi, et a fortiori aucun autre mode de convergence.

(Interprétation : "le maximum devient arbitrairement grand avec probabilité 1")

CC 4 - séance 4

Cours

Définition de la covariance, puis du coefficient de corrélation.

Exercice

Soient X et Y deux VA normales indépendantes, de même loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Montrez que U et V sont indépendantes, et déterminez la loi du couple.

Corrigé

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V) &= \mathrm{E}[UV] - \mathrm{E}[U]\mathrm{E}[V] \\ &= \mathrm{E}[X^2] - \mathrm{E}[Y^2] - \mathrm{E}[X]^2 + \mathrm{E}[Y]^2 \\ &= \mathrm{Var}(X) - \mathrm{Var}(Y) = 0\end{aligned}$$

U et V gaussiennes décorrélées $\Rightarrow$ indépendantes.

Loi de $U = \mathcal{N}(2\mu, \sqrt{2}\sigma)$, loi de $V = \mathcal{N}(0, \sqrt{2}\sigma)$

Donc densité du couple $= \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-2\mu)^2+y^2}{4\sigma^2}\right)$