# Dépendances Fonctionnelles
## *Exercices Corrigés*

## Axiomes d'Armstrong

### Exercice 1
L'axiome de pseudo transitivité nous dit que si X→Y et YW→Z, alors XW→Z.
Démontrer cet axiome à l'aide des autres axiomes d'Arstrong.
X→Y alors XW→YW (accroissement)
XW→YW et YW→Z alors XW→Z (transitivité)

### Exercice 2
En utilisant les axiomes d'Armstrong, démontrer que si X→YZ et Z→CW alors X →YZC
Z→CW alors Z→CWZ (accroissement)
Z→CWZ alors YZ→CWZY (accroissement)
X→YZ et YZ→CWZY donc X→CWZY(transitivité)
X→CWZY donc X→CZY (projectivité)

### Exercice 3
Soit R(A,B,C,D,E,G,H) F = { AB→ C ; B→ D ; CD→ E ; CE→ GH ; G→ A }. En utilisant les axiomes d'Armstrong, montrer que l'on peut déduire de cet ensemble :

1. AB→E
   B→D donc AB→D par augmentation
   AB→C et AB→ D donc AB→CD par union
   AB→CD et CD→E donc AB→E par transitivité.
2. BG→C
   G → A donc BG → A par augmentation,
   BG → BG donc BG → B par projection,
   BG → A et BG → B donc BG → AB par union,
   BG → AB et AB → C donc BG → C par transitivité.
3. AB→G
   AB → E et AB → C donc AB → CE par additivité,
   AB → CE et CE → GH donc AB → GH par transitivité,
   AB → GH donc AB → G par projection.

### Exercice 4
Soit R(A,B, E,G,H,I,J) et F = {AB→E; AG→J; BE→I; E→G; GI→H}
En utilisant les axiomes d'Armstrong, montrer que l'on peut déduire de cet ensemble :

1. ABG→EGJ
   AB→E donc ABG→EG
   AG→J donc ABG→GJ
   ABG→EJG
2. AB→GH
   AB→ E et E→G, par transitivité AB→ G
   AB→E, par augmentation AB→BE
   AB→BE et BE→I, par transitivité AB→I
   AB→G et AB→I, par union AB→GI
   AB→GI et GI→H, par transitivité AB→H
   AB→G et AB→H, par union AB→GH

3. BE→H
   E→G donc BE→G
   BE→G et BE→I donc BE→GI
   BE→GI et GI→H donc BE→H

### Exercice 5

Soit R(A,B,C,D,E,G,H) et F = {AB→C, B→D, CD→E, CE→GH, G→A}.
En utilisant les axiomes d'Armstrong, montrer que l'on peut déduire de cet ensemble :

1. ABC→E
   AB→C et CD→E donc ABC→E
2. BG→C
   G→A donc BG→AB
   BG→AB et AB→C donc BG→C
3. BG→GH
   B→D donc BG→D
   BG→C et BG-D donc BG→CD
   CD→E donc CD→CE
   BG→CD et CD→CE donc BG→CE
   BG→CE et CE→GH donc BG→GH
4. GBCE→GH
   G→A donc GB→AB
   GB→AB et AB→C donc GB→C
   GB→C et CD→E donc GBC→E
   GBC→E donc GBCE→CE
   GBCE→CE et CE→GH donc GBCE→GH
5. AB→GH
   B→D donc AB→D
   AB→D et AB→C donc AB→CD
   CD→E donc CD→CE
   AB→CD et CD→CE donc AB→CE
   AB→CE et CE→GH donc AB→GH

## Propriétés des Dépendances Fonctionnelles

### Exercice 1

Soit la relation R (A, B, C, D, E, F) avec les Dfs F= {A→BC, E→CF, B→E, CD→EF}
Calculer la fermeture {A,B}+ de l'ensemble des attributs {A,B} pour cet ensemble de Df F.

0 : Calcul de la Fermeture de {AB}+
1 : Initialisation : {AB}+=AB
2 : Itération 0 : {AB}+={AB}
3 : Ajoute l'attribut C à AB+
4 : Le déterminant de A=>BC est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABC}
5 : Le déterminant de E=>CF n'est pas inclus dans {AB}+. {AB}+={ABC}
6 : Ajoute l'attribut E à AB+
7 : Le déterminant de B=>E est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCE}
8 : Le déterminant de CD=>EF n'est pas inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCE}
9 : Itération 1 : {AB}+={ABCE}
10 : Le déterminant de A=>BC est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCE}
11 : Ajoute l'attribut F à AB+
12 : Le déterminant de E=>CF est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
13 : Le déterminant de B=>E est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
14 : Le déterminant de CD=>EF n'est pas inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}

15 : Itération 2 : {AB}+={ABCEF}
16 : Le déterminant de A=>BC est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
17 : Le déterminant de E=>CF est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
18 : Le déterminant de B=>E est inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
19 : Le déterminant de CD=>EF n'est pas inclus dans {AB}+. {AB}+={ABCEF}
20 : Résultat : {AB}+={A,B,C,E,F}

## Exercice 2

Soit la relation R (A, B, C, D, E, F,G) avec les Dfs F= {AC→B, BC→DE, AEF→G}
Calculer la fermeture {A,C}+ de l'ensemble des attributs {A,C} pour cet ensemble de Df F.

0 : Calcul de la Fermeture de {AC}+
1 : Initialisation : {AC}+=AC
2 : Itération 0 : {AC}+={AC}
3 : Le déterminant de AC=>B est inclus dans {AC}+. {AC}+={AC}
4 : Ajoute l'attribut B à AC+
5 : Le déterminant de BC=>DE est inclus dans {AC}+. {AC}+={ABC}
6 : Ajoute l'attribut D à AC+
7 : Ajoute l'attribut E à AC+
8 : Le déterminant de AEF=>G n'est pas inclus dans {AC}+. {AC}+={ABCDE}
9 : Itération 1 : {AC}+={ABCDE}
10 : Le déterminant de AC=>B est inclus dans {AC}+. {AC}+={ABCDE}
11 : Le déterminant de BC=>DE est inclus dans {AC}+. {AC}+={ABCDE}
12 : Le déterminant de AEF=>G n'est pas inclus dans {AC}+. {AC}+={ABCDE}
13 : Résultat : {AC}+={A,B,C,D,E}

## Exercice 4

Soit la relation R (A, B, C, D, E, F) avec les Dfs F= {AB→C, C→A, BC→D, ACD→B, BE→C, CE→FA, CF→BD, D→EF}
Trouvez un équivalent irréductible de cet ensemble de Df.

Ensemble irréductible de dépendance = Couverture non redondante réduite : Soit S un ensemble de Dfs. S est irréductible s'il satisfait les 3 propriétés suivantes :
Le membre droit de chaque Df de S contient un seul attribut (autrement dit, les Dfs sont sous formes canoniques et on enlève les Dfs « doublons »). → Réduction à droite
Le membre gauche de chaque Df est irréductible : aucun attribut ne peut être enlevé à gauche sans changer la fermeture S+ (cad sans transformer S en un ensemble qui n'est pas équivalent à S). → Réduction à gauche
Aucune Df ne peut être supprimée de S sans changer la fermeture S+
Pour chaque ensemble de Df, il existe au moins un ensemble équivalent irréductible (il peu y en avoir plusieurs, cela dépendra de l'ordre des réductions que l'on effectuera).
Application de l'algorithme
Etape 1 : mettre les Dfs sous forme canonique, réduction à droite
On obtient F' = { AB → C, C → A, BC → D, ACD → B, BE → C, CE → F, CE → A, CF → B, CF → D, D → E, D → F}
Etape 2 : réduction à gauche
C → A, par augmentation CE → A ➔ On enlève CE → A
Etape 3 : couverture non redondante
CF → B, par augmentation, CF → BC
CF → BC et BC → D, par transitivité CF → D ➔ On enlève CF → D
CF → B, par augmentation ACF → AB
D → F, par augmentation ACD → ACF
ACD → ACF et ACF → AB, par transitivité, ACD → AB
ACD → AB, par décomposition ACD → B ➔ On enlève ACD → B
Une couverture non redondante réduite de F est : { AB → C, C → A, BC → D, BE → C, CE → F, CF → B, D → E, D → F}
Une autre couverture non redondante de F est : { AB → C, C → A, BC → D, BE → C, CE → F, CF → D, D → E, D → F}

## Exercice 5

Soit la relation R (A, B, C, D, E, F, G, H, I) avec les Dfs F= {ABD→E, AB→G, B→F, C→J, CJ→I, G→H }. Cet ensemble est-il irréductible ?

0 : PREMIERE ETAPE : Ré-écriture des DF en DF simple
1 : *******RESULTAT PREMIERE ETAPE : F={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
2 : *************************************************************************************
3 : SECONDE ETAPE : Elimination des DF redondates
4 : Cherche la redondance de ABD=>E dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
5 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
6 : Initialise T : T={A,B,D}
7 : Itération 1 : G={AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={A,B,D}
8 : Le déterminant de AB=>G est inclus dans T
9 : Ajoute la partie droite à T : T={A,B,D,G}
10 : Supprime AB=>G de G
11 : Itération 2 : G={B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={A,B,D,G}
12 : Le déterminant de B=>F est inclus dans T
13 : Ajoute la partie droite à T : T={A,B,D,G,F}
14 : Supprime B=>F de G
15 : Itération 3 : G={C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={A,B,D,G,F}
16 : Le déterminant de C=>J n'est pas inclus dans T
17 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
18 : Le déterminant de G=>H est inclus dans T
19 : Ajoute la partie droite à T : T={A,B,D,G,F,H}
20 : Supprime G=>H de G
21 : Itération 4 : G={C=>J,CJ=>I}, T={A,B,D,G,F,H}
22 : Le déterminant de C=>J n'est pas inclus dans T
23 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
24 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
25 : Cherche la redondance de AB=>G dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
26 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
27 : Initialise T : T={A,B}
28 : Itération 1 : G={ABD=>E,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={A,B}
29 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
30 : Le déterminant de B=>F est inclus dans T
31 : Ajoute la partie droite à T : T={A,B,F}
32 : Supprime B=>F de G
33 : Itération 2 : G={ABD=>E,C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={A,B,F}
34 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
35 : Le déterminant de C=>J n'est pas inclus dans T
36 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
37 : Le déterminant de G=>H n'est pas inclus dans T
38 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
39 : Cherche la redondance de B=>F dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
40 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
41 : Initialise T : T={B}
42 : Itération 1 : G={ABD=>E,AB=>G,C=>J,CJ=>I,G=>H}, T={B}
43 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
44 : Le déterminant de AB=>G n'est pas inclus dans T
45 : Le déterminant de C=>J n'est pas inclus dans T
46 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
47 : Le déterminant de G=>H n'est pas inclus dans T
48 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
49 : Cherche la redondance de C=>J dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
50 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
51 : Initialise T : T={C}
52 : Itération 1 : G={ABD=>E,AB=>G,B=>F,CJ=>I,G=>H}, T={C}

53 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
54 : Le déterminant de AB=>G n'est pas inclus dans T
55 : Le déterminant de B=>F n'est pas inclus dans T
56 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
57 : Le déterminant de G=>H n'est pas inclus dans T
58 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
59 : Cherche la redondance de CJ=>I dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
60 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
61 : Initialise T : T={C,J}
62 : Itération 1 : G={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,G=>H}, T={C,J}
63 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
64 : Le déterminant de AB=>G n'est pas inclus dans T
65 : Le déterminant de B=>F n'est pas inclus dans T
66 : Le déterminant de C=>J est inclus dans T
67 : Ajoute la partie droite à T : T={C,J}
68 : Supprime C=>J de G
69 : Itération 2 : G={ABD=>E,AB=>G,B=>F,G=>H}, T={C,J}
70 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
71 : Le déterminant de AB=>G n'est pas inclus dans T
72 : Le déterminant de B=>F n'est pas inclus dans T
73 : Le déterminant de G=>H n'est pas inclus dans T
74 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
75 : Cherche la redondance de G=>H dans l'ensemble {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H} par l'algorithme d'appartenance
76 : Initialise l'ensemble G : {ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
77 : Initialise T : T={G}
78 : Itération 1 : G={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I}, T={G}
79 : Le déterminant de ABD=>E n'est pas inclus dans T
80 : Le déterminant de AB=>G n'est pas inclus dans T
81 : Le déterminant de B=>F n'est pas inclus dans T
82 : Le déterminant de C=>J n'est pas inclus dans T
83 : Le déterminant de CJ=>I n'est pas inclus dans T
84 : Aucune partie droite des DF restantes de G n'est incluse dans T
85 : *******RESULTAT SECONDE ETAPE : F={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
86 : ************************************************************************************
87 : TROISIEME ETAPE : Réduction à gauche des DF
88 : Itération 0 : LF={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,CJ=>I,G=>H}
89 : Recherche des attributs gauches accessoires dans ABD=>E
90 : Test attribut A : E n'est pas dans la fermeture (ABD-A)+ = {B,D,F}
91 : Test attribut B : E n'est pas dans la fermeture (ABD-B)+ = {A,D}
92 : Test attribut D : E n'est pas dans la fermeture (ABD-D)+ = {A,B,F,G,H}
93 : Recherche des attributs gauches accessoires dans AB=>G
94 : Test attribut A : G n'est pas dans la fermeture (AB-A)+ = {B,F}
95 : Test attribut B : G n'est pas dans la fermeture (AB-B)+ = {A}
96 : Recherche des attributs gauches accessoires dans CJ=>I
97 : Test attribut C : I n'est pas dans la fermeture (CJ-C)+ = {J}
98 : Test attribut J : I est dans la fermeture (CJ-J)+ = {C,I,J}
99 : J est attribut gauche accessoire, et peut être retiré
100 : Itération 1 : LF={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,G=>H,C=>I}
101 : Recherche des attributs gauches accessoires dans ABD=>E
102 : Test attribut A : E n'est pas dans la fermeture (ABD-A)+ = {B,D,F}
103 : Test attribut B : E n'est pas dans la fermeture (ABD-B)+ = {A,D}
104 : Test attribut D : E n'est pas dans la fermeture (ABD-D)+ = {A,B,F,G,H}
105 : Recherche des attributs gauches accessoires dans AB=>G
106 : Test attribut A : G n'est pas dans la fermeture (AB-A)+ = {B,F}
107 : Test attribut B : G n'est pas dans la fermeture (AB-B)+ = {A}
108 :
109 :
110 : ******* Couverture Canonique : F={ABD=>E,AB=>G,B=>F,C=>J,G=>H,C=>I}

## Exercice 6

Soit la relation R( A, B, C, D, E, G) avec les Dfs F ={AB→C, C→A, BC→D, ACD→B, D→EG, BE→C, CG→BD, CE→AG }

1. Montrer que les Dfs CE→A et CG→B sont redondantes.
2. En déduire une couverture non redondante de F
3. Montrer qu'il y a un attribut étranger dans ACD→B.
4. Donner une couverture non redondante réduite de F.
5. En reprenant F montrer que CG→D est redondante ainsi que ACD→B.
6. En déduire une seconde couverture non redondante réduite ayant moins d'éléments que la première.

1.On ré écrit d'abord sous forme de dépendances fonctionnelles élémentaires.
F ={AB→C, C→A, BC→D, ACD→B, D→E, D→G, BE→C, CG→B, CG→D, CE→A, CE→G }

*C→ A, par augmentation CE → AE, par décomposition CE → A

*CG→D et ACD→B donc ACG→B (pseudo transitivité)
C→A et ACG→B donc CG->B (pseudo transitivité)

2. ,Couverture non redondante de F = {AB → C, C→ A, BC → D, ACD → B, D → E, D → G, BE → C, CG → D, CE → G
3.On a A attribut étranger dans ACD → B car ACD → B et C → A, donc CD → B
4.Couverture non redondante réduite de F = {AB → C, C→ A, BC → D, CD → B, D → E, D → G, BE → C, CG → D, CE → G}
5. D → E, par augmentation, CD → CE
CD → CE et CE → G, par transitivité CD → G
CD → G, par augmentation CD → CG
CD → CG et CG → B, par transitivité CD → B (donc ACD → B, on peut l'éliminer)
CG → B, par augmentation CG → CB
CG → CB et BC → D, par transitivité CG → D (donc on peut l'éliminer)
6. Couverture non redondante réduite de F = {AB → C, C→ A, BC → D, D → E, D → G, BE → C, CG → B, CE → G}

## Exercice 7

Soit la relation R( A, B, C, D, E) avec les Dfs F={A→CD, C→BDE, D→CE}

1. Calculer une couverture élémentaire de F.

   Couverture élémentaire de F : Dfs de $F^+$ qui sont élémentaires (cad pour X → Y:, il n'existe pas X'⊂ X tel que X' → Y)
   {A → CD, C → BE D → E} par exemple, ou {A → C, C → BD, D → CE}…
2. Donner deux couvertures non redondantes réduites de F.
   Première couverture non redondante réduite {A → C, C → B, C → D, D → C, D → E}
   Deuxième couverture non redondante réduite {A → D, C → B, C → D, D → C, C → E}