© *Jean-Baptiste APOUNG KAMGA <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

Fiche de TP : Equation de transport, lois de conservation

Thème - 1 *Transport et méthode de différences finies*

On s'intéresse ici à la résolution de l'équation de transport scalaire

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

où c est un réel fixé et u_0 est une fonction de classe C^1 donnée. Pour cela, on utilise la méthode des différences finies consistant en le calcul de la valeur approchée u_j^n de la solution de (1) en les points $(x_j = jh, t_n = nk)(j \in \mathbb{Z}, n \geq 0)$, où h et k désignent respectivement le pas d'espace et le pas de temps. La donnée initiale est choisie gaussienne : $u_0(x) = e^{-x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Exercice-1 **:** On utilise les schémas explicites suivants :

$$\frac{1}{k}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{c}{h}\left(u_{j+1}^n - u_j^n\right) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \tag{2}$$

$$\frac{1}{k}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{c}{h}\left(u_j^n - u_{j-1}^n\right) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{k}\left(u_j^{n+1} - u_j^n\right) + \frac{c}{2h}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) - \frac{kc^2}{2h^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0. \tag{4}$$

Faire l'analyse de l^2 stabilité de ces schémas en précisant dans chacun des cas l'influence du signe de c.

Exercice-2 **:** Ecrire un programme **`matlab`** permettant d'utiliser ces schémas numériques sur un domaine borné $]-A, A[$ avec $\frac{k}{h} := \lambda$ fixé et d'afficher la valeur approchée de la solution à l'instant final T donné. On pourra fixer $h = A/M$ où M est prescrit. De plus, dès que le besoin s'en fera sentir, on pourra imposer que la solution s' annule sur le bord, où faire recours aux conditions aux limites périodiques.

Exercice-3 **:** Retrouver les résultats de stabilité dans les cas $c = \pm 1$ et commenter les résultats obtenus lorsque $c\lambda = \pm 1$.

Remark 0.0.1.

- On remarque que tous les schémas précédents peuvent se mettre sous la forme :

$$u_j^{n+1} = \alpha u_{j-1}^n + \beta u_j^n + \gamma u_{j+1}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \tag{5}$$

  où α, β, γ dépendent de h, k avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$.
- Puisque $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on a :

$$|\alpha e^{-i\theta} + \beta + \gamma e^{+i\theta}|^2 = 1 - 4\Big(\beta(\alpha+\gamma) + 4\alpha\gamma\Big)\sin^2(\frac{\theta}{2}) + 32\alpha\gamma\sin^4(\frac{\theta}{2}) \quad \forall\theta \in [-\pi, \pi]$$

- **Définition :** Lorsque $\alpha + \beta + \gamma = 1$, on dit que le schéma **`préserve les constantes`**.
- **Définition :** Lorsque $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$, le schéma est dit **`monotone`** :

$$(v_j^n > w_j^n \quad \forall j \in \mathbb{Z}) \Longrightarrow (v_j^{n+1} > w_j^{n+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}).$$

- **Proposition :** Lorsqu'un schéma est monotone et préserve les constantes, il est stable l^∞ :

$$\forall T > 0,\ \exists C_T > 0,\ \sup_{nk<T}\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}|v_j^n|\right) \leq C_T\left(\sup_{j\in\mathbb{Z}}|v_j^0|\right).$$

  (*Voir Thème 5* pour d'autres informations).

Pour mettre en oeuvre ces schémas avec conditions aux limites périodiques, on peut écrire :

Listing 1 – Flux fichier : FDTransport.m

```
function [uu] = FDTransport(u,alpha,beta,gamma)
 n  = length(u);
 uu = zeros(n,1);
 Ig = [n,1:n-1];
 Id = [2:n,1];
 for j = 1:n
   uu(j) = alpha * u(Ig(j)) + beta * u(j) + gamma *  u(Id(J));
 end
 %uu = alpha * u(Ig) + beta * u + gamma * u(Id) % ceci evite boucle et initialissation de uu
end
```

où de manière vectorielle

Listing 2 – Flux fichier : FDTransport.m

```
function [uu] = FDTransport(u,alpha,beta,gamma)
 uu = alpha * circshift(u,[0,1]) + beta * u + gamma * circshift(u,[0,-1]);
end
```

La fonction principale pourra être :

Listing 3 – Flux fichier : testFDTransport.m

```
function [res] = testFDTransport(M)

clf;

c = -1;
lambda = 0.9/abs(c);
A =10;
h = A/M;
x = -A:h:A;
dt = h*lambda;

u = exp(-10*x.*x);          % condition initiale
plot(x,u,'*-');             % dessin de la solution initiale


% (Downwind)
alpha = 0;
beta  = 1 + c * lambda;
gamma = -c* lambda ;
scheme1 = @(u) FDTransport(u,alpha,beta,gamma);


% (Upwind)
alpha = c * lambda;
beta  = 1 - c * lambda;
gamma = 0 ;
scheme2 = @(u) FDTransport(u,alpha,beta,gamma);


% (Lax-Wendroff)
alpha = (1 + c * lambda)/2;
beta  = 0;
gamma = (1 - c * lambda)/2;
scheme3 = @(u) FDTransport(u,alpha,beta,gamma);


u1 = u;
u2 = u;
u3 = u;

for i =1:2000

  t = 0 + i*dt;
  u1 = scheme1(u1);
  u2 = scheme2(u2);
  u3 = scheme3(u3);

  figure(1)
  %subplot(1,2,1);
  plot(x,u1,'+', x,u3,'-');
  legend('scheme1','scheme3'); drawnow;
  s = sprintf('Downwind and Lax-wendroff c = %f',c);
  title(s);
  drawnow;

  %subplot(1,2,2);
  figure(2)
  plot(x,u2,'+', x,u3,'-');
  legend('scheme2','scheme3');
  title(sprintf('Upwind and Lax-wendroff c = %f',c));
  drawnow;

end
res = 0;
end
```

On considère à présent une équation plus générale

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial f(u)}{\partial x} & = & 0, \quad x\in\mathbb{R} \quad t>0 \\ \\ u(0,x) & = & u_0(x) \quad x\in\mathbb{R} \end{array}\right. \tag{6}$$

Comme précédemment on souhaite approcher les valeurs $u(t_n,x_i), j\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$. On utilise ici une méthode de volumes finis. Pour cela on introduit les points intermédiaires $x_{i+\frac{1}{2}}, i\in\mathbb{Z}$ et on fait l'hypothèse qu'*à chaque instant t_n, la solution est constante sur l'intervalle $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}], i\in\mathbb{Z}$.*

Cette valeur constante vaut $u_i(t_n)=\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(t_n,x)\,dx$ où $h_i=|x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i-\frac{1}{2}}|$.

Ainsi, pour construire le schéma volumes finis, on intègre l'équation (6) sur l'intervalle $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ sur laquelle on approche la solution par sa valeur moyenne : $u_i(t)=\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u(t,x)\,dx$. On obtient, en supposant le pas constant ($h_i=h\,\forall i$) :

$$h\frac{du_i(t)}{dt}+\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}}\frac{\partial f(u)}{\partial x}\,dx=0. \tag{7}$$

Soit encore

$$h\frac{du_i(t)}{dt}+f(t)^*_{i+\frac{1}{2}}-f(t)^*_{i-\frac{1}{2}}=0, \tag{8}$$

où $f(t)^*_{i\pm\frac{1}{2}}$ appelée **flux numérique** est une valeur approchée de $f(u)$ au point $x_{i\pm\frac{1}{2}}$ à l'instant t. La difficulté majeure autour de la méthode des volumes finis est la construction effective de ces flux numériques. Il faut noter que u étant constante à gauche (où elle vaut u_i) et à droite (de valeur u_{i+1}) de $x_{i+\frac{1}{2}}$, le flux $f^*_{i+\frac{1}{2}}$ va à son tour dépendre de $u^L_{i+\frac{1}{2}}$ et $u^R_{i+\frac{1}{2}}$ qui sont respectivement les valeurs approchées de u à gauche et à droite de $x_{i+\frac{1}{2}}$. On exprime cela en écrivant

$$f^*_{i+\frac{1}{2}}\equiv f^*_{i+\frac{1}{2}}(u^L_{i+\frac{1}{2}},u^R_{i+\frac{1}{2}}). \tag{9}$$

Il ne reste plus qu'à construire pour chaque i, les quantités $u^L_{i+\frac{1}{2}}, u^R_{i+\frac{1}{2}}$ et $f^*_{i+\frac{1}{2}}$, la contrainte particulière étant la notion de **consistance du flux** stipulant que $f^*(v,v)=f(v)\,\forall v$. Il n'est pas rare que des propriétés comme la monotonie ou le caractère Lipschitz de ces flux soient recherchées.

Enumérons à présent des expressions particulières de ces flux ainsi que les schémas résultants.

Exercice-1 : **Schéma centré**. Ici le flux est donné par

$$f^*_{i+\frac{1}{2}}=f\left(\frac{u_i+u_{i+1}}{2}\right).$$

Implémenter ce schéma et évaluer le sur l'équation de transport, c'est-à-dire $f(u)=cu$. On justifiera le comportement observé.

Exercice-2 : **Schéma décentré :** Ce schéma correspond à l'expression suivante du flux

$$f^*_{i+\frac{1}{2}}=\left\{\begin{array}{ll} f(u_i) & \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{u_i+u_{i+1}}{2})\geq 0, \\ f(u_{i+1}) & \text{si} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\frac{u_i+u_{i+1}}{2})<0. \end{array}\right.$$

Implémenter ce schéma et évaluer le sur l'équation de transport, c'est-à-dire $f(u) = cu$.

Exercice-3 : Schéma avec flux de type Lax-Friedrichs

Il est basé sur le fait que si l'on dispose d'une bonne approximation de $u^L_{i+\frac{1}{2}}$ et $u^R_{i+\frac{1}{2}}$, alors on peut prendre

$$f^*_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f(u^L_{i+\frac{1}{2}}) + f(u^R_{i+\frac{1}{2}}) - a_{i+\frac{1}{2}}(u^R_{i+\frac{1}{2}} - u^L_{i+\frac{1}{2}})\right),$$

avec $a_{i+\frac{1}{2}} = \max\left(\varrho\left(\frac{\partial f(u_i)}{\partial u}\right), \varrho\left(\frac{\partial f(u_{i+1})}{\partial u}\right)\right)$, où $\varrho(A)$ désigne le rayon spectral de A.

Suivant le choix de $u^L_{i+\frac{1}{2}}$ et $u^R_{i+\frac{1}{2}}$, divers schémas voient jour, dont les plus importants sont les suivants

1. **Schémas avec flux de Lax-Friedrichs local** : $u^L_{i+\frac{1}{2}} = u_i, \quad u^R_{i+\frac{1}{2}} = u_{i+1}$.
2. **Schémas centré de Kurganov-Tadmor avec limitation de flux**

$$\begin{cases} u^L_{i+\frac{1}{2}} &= u_i + \frac{\phi(r_i)}{2}(u_{i+1} - u_i), \\ u^R_{i+\frac{1}{2}} &= u_{i+1} - \frac{\phi(r_{i+1})}{2}(u_{i+2} - u_{i+1}), \\ r_i &= \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i}. \end{cases}$$

Des exemples célèbres de limiteur de flux ϕ sont fournis dans la littérature et certains sont listés ci-dessous :

	Van-Albada (2003)	Ospre (1995)	charm (1995)	minmod (1986)
$\phi(r)$	$\frac{2r}{1+r^2}$	$1.5\frac{r^2+r}{r^2+r+1}$	$\begin{cases} \frac{r(3r+1)}{(r+1)^2} & \text{si} \quad r > 0 \\ 0 & \text{si} \quad r \leq 0 \end{cases}$	$\max(0, \min(1, r))$

Implémenter ces schémas et évaluer les sur l'équation de transport, c'est-à-dire $f(u) = cu$.

Thème - 3 *Quelques idées pour la mise en oeuvre*

Pour une équation, comme celle donnée en (6), on appellera fonction flux la fonction $f(t, u)$ (on considère le cas général où f dépend aussi explicitement de t) . Son implémentation est donnée à travers un fichier **flux.m** défini comme suit :

Listing 4 – Flux fichier : flux.m

```
function [f,fprime] =flux(t,x)
c = 1;
f = x*x/2.;%c * x;
fprime = x;%c;
```

Où l'on a choisi de retourner aussi la dérivée partielle de $f(\cdot, \cdot)$ par rapport à son second argument, afin de traiter sans calculs supplémentaires le cas du schéma décentré.

L'équation (8) peut se mettre sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) :

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), \quad \text{où} \quad u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))^T.$$

Sous cette forme, on peut résoudre l'équation différentielle par toute méthode sous la main. Cette approche consistant à figer l'espace lors de la discrétisation, pour aboutir à un système d'EDOs s'appelle **méthode des lignes** et en anglais **Method Of Lines (MOL)**.

Afin d'implémenter le second membre de l'équation de transport discrétisé par volumes finis, avec conditions aux limites périodiques, à savoir $F(t,u)$ dans notre cas, on peut introduire la fonction suivante qui prend comme troisième argument le limiteur de flux :

Listing 5 – Transport fichier : transport.m

```
function [ures] = transport(t,u,limit)

  n = length(u); % nombre de mailles
  ures = u;
  for i=1:n
    % TRAITEMENT DANS LA MAILLE I de numero i
    im = indexg(i,n);    % numero de la maille à  gauche c-a-d  i-1
    ip = indexd(i,n);    % numero de la maille à  droite c-a-d  i+1
    uim = u(im);         % valeur de la solution dans la maille à  gauche
    ui  = u(i);          % valeur de la solution dans la maille i
    uip = u(ip);         % valeur de la solution dans la maille à  droite
    [fi,fi_prime] = flux(t,ui); % f(u_i) et df/du (u_i)

    % FLUX A DROITE  NOTE ICI fstarp
    [fip,fip_prime] = flux(t,uip);
    ap = max(abs([fi_prime,fip_prime]));
    uipp = u(indexd(ip,n));
    %ri = (ui - uim)/(uip - ui);
    riup = (ui - uim);
    ridown = (uip - ui);
    %rip = (uip -ui)/(uipp - uip);
    ripup = (uip -ui);
    ripdown = (uipp - uip);
    % calcul des valeurs à gauche (upL) et à  droite (upR) de u en xp
    upL = ui + 0.5*limit(riup,ridown)*(uip - ui);
    upR = uip - 0.5*limit(ripup,ripdown)*(uipp - uip);

    fstarp = 0.5 *( flux(t,upR)+flux(t,upL) - ap *(upR-upL));

    % FLUX A GAUCHE NOTE ICI fstarm
    [fim,fim_prime] = flux(t,uim);
    am = max(abs([fi_prime,fim_prime]));
    uimm = u(indexg(im,n));
    %rim = (uim -uimm)/(ui - uim);
    rimup = (uim -uimm);
    rimdown = (ui - uim);
    %ri = (ui - uim)/(uip - ui);
    riup = (ui - uim);
    ridown = (uip - ui);
    umL = uim + 0.5 * limit(rimup,rimdown)*(ui - uim);
    umR = ui  - 0.5 * limit(riup,ridown)*(uip - ui);

    fstarm =    0.5 * ( flux(t,umR)+flux(t,umL) - am *(umR-umL));

    % STOCKAGE
    ures(i) =-1.0 *(fstarp - fstarm);
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% functions retournant les numeros des mailles voisines
% sous hypothèse des conditions aux limites périodiques

%%%%%%%%%%%% NUMERO MAILLE A GAUCHE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function j=indexg(i,n)
  if(i>=2)
    j = i-1;
  else
    j = n;
  end
end
```

```
%%%%%%%%%%%% NUMERO MAILLE A DROITE %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function j = indexd(i,n)
  if(i<n)
    j=i+1;
  else
    j=1;
  end
end
```

En ce qui concerne les limiteurs, des exemples sont fournis ci-dessous. Il faut cependant noter que pour éviter des erreurs dans l'évaluation de $\phi(r)$ avec $r = (v_1 - v_2)/(v_3 - v_4)$, on a convenu de définir ϕ comme une fonction de deux variables, la première étant le numérateur et la seconde le dénominateur. Ainsi au lieu d'écrire $\phi((v_1 - v_2)/(v_3 - v_4))$ on fait le choix d'écrire $\phi(v_1 - v_2, v_3 - v_4)$, ce qui permet de traiter les cas singuliers comme ceux où l'on aurait $v_3 = v_4$.

Listing 6 – Minmod fichier : minmod.m

```
function y=minmod(rup,rdown)
  if(abs(rdown) <1e-16)
    y=1;
  else
    r= rup/rdown;
    y = max(0,min(1,r));
  end
end
```

Listing 7 – Ospre fichier : ospre.m

```
function y=ospre(rup,rdown)
  if(abs(rdown) <1e-16)
    y=1.5;
  else
    r= rup/rdown;
    y = 1.5*(r*r+r)/(r*r + r + 1);
  end
end
```

Afin de tester les programmes sur l'équation de transport avec un schéma d' Euler explicite en temps, un programme principal pourrait être :

Listing 8 – Test fichier : testtransport.m

```
function testtransport()
  clear all;
  x =linspace(-10,10,200); % sommets du maillage
  dx = x(2)-x(1);          % pas uniforme d'espace
  dt = 0.5 * dx;           % pas de temps
  lambda = dt/dx;          %
  xplot = (x(1:end-1) + x(2:end))/2; % centres des mailles
  u = exp(-10*xplot.*xplot);         % condition initiale
  uu = u;                            %
  plot(xplot,u,'*-');                % dessin de la solution initiale

  for i =1:2000
    t = 0 + i*dt
    u  = u  + lambda * transport(t,u, @minmod);
    uu = uu + lambda * transport(t,uu,@ospre);
    plot(xplot,u,'+',xplot,uu,'-');
    legend('minmod','opspre');
    drawnow;
    %pause();
  end
end
```

Note : *Deux fonctions sont fournies en fin de fichier* **`transport.m`**, *permettant de gérer la connectivité des mailles pour des conditions aux limites périodiques. Il serait judicieux de les isoler dans les fichiers* **`indexg.m`** *et* **`indexd.m`** *afin de les rendre accessibles aux scripts que vous écrirez pour les différents exercices.*

Exercice-1 : Modifier la fonction **`function [uu] =transport(t, u, limit)`** de sorte à la rendre beaucoup plus vectorielle.

Exercice-2 : Modifier le programme principal de sorte à utiliser les solveurs d'EDO de **`Matlab`**.

Appliquez le schéma centré de Kurganov-Tadmor sur l'un des problèmes suivants :

Exercice-1 **:** **Un problème de transport réactif**

On considère

$$\begin{cases} \partial_t C_1 + V\partial_x C_1 - D\partial^2_{xx} C_1 + K_1(C_1,x)C_1 = f_1(C_2,x) \ \ sur \ \ ]0,T[\times]0,L[, \\ \partial_t C_2 + V\partial_x C_2 - D\partial^2_{xx} C_2 + K_2(C_2,x)C_2 = f_2(C_1,x) \ \ sur \ \ ]0,T[\times]0,L[, \end{cases}$$

où,

$$\begin{array}{ll} K_1(C,x) = \frac{V_m^1 x}{K_h^1 + C}\delta_1, & f_1(C,x) = -\kappa_{12}K_2(C,x)C, \\ K_2(C,x) = \frac{V_m^2 x}{K_h^2 + C}\delta_2, & f_2(C,x) = -\kappa_{21}K_1(C,x)C. \end{array}$$

Les conditions aux limites sont données par :

$$\begin{array}{ll} C_1(t,0) = 3.0, & \partial_x C_1(t,L) = 0, \\ C_2(t,0) = 10., & \partial_x C_2(t,L) = 0. \end{array}$$

Les conditions initiales étant

$$C_1(0,x) = 3.0, \qquad C_2(0,x) = 0.0$$

Dans cet exercice, les paramètres sont définis comme suit :

$$\begin{array}{ll} V_m^i = 1.0/jour, i = 1,2 & \kappa_{12} = 2.0, \\ K_h^i = 1.0mg/L, i = 1,2 & \kappa_{21} = 0.5. \end{array}$$

On a aussi les valeurs suivantes

$$\begin{array}{lll} V = 1.0m/jour, & D = 0.2m^2/jour, & L = 100m. \\ \delta_1 = 1, & \delta_2 = 1. & \end{array}$$

Représenter sur une même figure les courbes de C_1 et C_2 à l'instant $t = 68$ jours, obtenues par la méthode de volumes finis décrite ci-dessus.

Exercice-2 **:** **Un problème modèle de séchage**

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ et $\mathbf{g} \in R^4$, on souhaite déterminer $\mathbf{u} : [0,T] \times [0,Z] \to \Omega \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{A}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & = & \mathbf{g}(\mathbf{u}), \in]0,T]\times]0,Z] \\ u(0,z) & = & u^0(z), \quad z \in [0,Z] \\ u(t,0) & = & u_0(t), \quad t \in [0,T] \end{array} \right. \tag{10}$$

Où $Z > 0, T > 0, \mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3,u_4)^t$ est le vecteur des variables d'état ; $\mathbf{A} = diag(1, \frac{\mu}{\nu}, 1, \frac{\mu}{\nu})$ et chaque composante de l'application $\mathbf{u} \to \mathbf{g}(\mathbf{u})$ est définie par :

$$\begin{array}{rcl} g_{1S}(\mathbf{u}) & = & \theta_{1S} - \dfrac{\beta_S(u_4 + \lambda u_2 - \lambda\zeta)}{\sigma_G - u_2} + \dfrac{\gamma_S u_3}{\sigma_S + u_1} \\ g_{1G}(\mathbf{u}) & = & \theta_{1G} - \dfrac{\beta_G(u_4 + \lambda u_2 - \lambda\zeta)}{\sigma_G - u_2} + \dfrac{\gamma_G u_3}{\sigma_S + u_1} \\ g_{1G}(\mathbf{u}) & = & \theta_{2S} - \dfrac{\delta_S(u_4 + \lambda u_2 - \lambda\zeta)}{\sigma_G - u_2} - \dfrac{\varepsilon_S u_3}{\sigma_S + u_1} \\ g_{2G}(\mathbf{u}) & = & \theta_{2G} - \dfrac{\delta_G(u_4 + \lambda u_2 - \lambda\zeta)}{\sigma_G - u_2} + \dfrac{\varepsilon_G u_3}{\sigma_S + u_1} \end{array} \tag{11}$$

Les valeurs potentielles pour les paramètres physiques sont données dans le tableau ci-après

Listing 9 – Paramètres physiques

```
%      mu =  18.548
%      nu =  1
%      betaS =  5.6180
%      gammaS =  5.6180
%      sigmaS =  0.20000
%      detaS =  0.044440
%      gammaS =  5.6180
%      sigmaS =  0.20000
%      deltaS =  0.044440
%      epsilonS =  0.044440
%      betaG = -5.6180
%      gammaG = -5.6180
%      sigmaG = -0.70370
%      deltaG = -0.098770
%      epsilonG = -0.098770
%      theta1S =  3.3307e-16
%      theta1G = -3.3307e-16
%      theta2S = -1.7347e-18
%      theta2G = 0
%      Z =  2
%      T =  0.75586
%      tauS = 0.17778;
%      tauG = 0.17778;
%      lambda = 0.01758
%      zeta   = 0.11111
```

Pour cette étude de cas les conditions initiales et aux limites sont les suivantes :

$$u^0 = u_0 = (1, 0, 0.21333, -0.83076)^t.$$

Les composantes u_1, u_2 *du vecteur* $\mathbf{u}$ *représente la teneur en humidité du solide et du gaz, respectivement et les composantes* u_3, u_4 *sont des densités de transfert d'énergie liées aux températures* T_S *du solide et* T_G *du gaz, par les formules :*

$$T_S = \frac{u_3}{\sigma_S + u_1} - \tau_S \qquad \textit{et} \qquad T_G = \frac{u_4 + \lambda u_2 - \lambda\zeta}{\sigma_G - u_1} - \tau_G$$

où τ_S *et* τ_G *sont deux constantes. Pour l'étude considérée ici, on prendra*

$$\tau_S = \tau_G = 0.17778.$$

On souhaite observer l'évolution dans le temps et dans l' espace des variables u_1, u_2, T_S, T_G*.*

Tous les schémas qui sont présentés peuvent s'écrire sous la forme compacte $(P_{k,h}v)_j^n = 0$*,* $j \in \mathbb{Z}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, relativement à la résolution du problème continu* $Pu = 0$*.*

Définition *(Consistance). Le schéma aux différences finies* $(P_{k,h}v)_j^n = 0$ *est dit consistant avec le problème* $Pu = 0$ *si pour toute fonction régulière* $\phi := \phi(t,x)$*,*

$$P\phi - P_{k,h}\phi \to 0$$

si $k \to 0$ *et* $h \to 0$*, la convergence étant au sens ponctuel en chacun des points de discrétisation.*

Définition *(Ordre). Le schéma aux différences finies* $(P_{k,h}v)_j^n = 0$ *consistant avec le problème* $Pu = 0$ *est dit précis à l'ordre* p *en temps et* q *en espace si pour toute fonction régulière* $\phi := \phi(t,x)$ *telle que* $P\phi = 0$*, on a*

$$P_{k,h}\phi = \mathcal{O}(k^p + h^q).$$

Définition *(Stabilité). On dit que le schéma aux différences finies* $P_{k,h}v = 0$ *est stable au sens* l^2 *si, en posant* $T = Nk$ *le temps final prescrit,*

$$\|v^n\| \leq C_T \|v^0\|, \quad \forall n \neq N,$$

où C_T *est une constante qui ne dépend éventuellement que de* T *et*

$$\|v\| = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |v_j|^2\right)^{1/2}.$$

Définition*(Norme dans* $l^2(\mathbb{Z})$*). Pour des suites dans* $l^2(\mathbb{Z})$*, on introduit les normes*

$$\|v\|_{l^2(\mathbb{Z})} = \|v\|_2 = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j|^2\right)^{1/2}, \qquad \|v\|_{l^2(h\mathbb{Z})} = \|v\|_h = \left(h\sum_{j\in\mathbb{Z}} |v_j|^2\right)^{1/2} = \sqrt{h}\|v\|_2.$$

Définition *(Transformée de Fourier). Soit* $\widehat{\cdot}$ *l'application définie par*

$$\begin{array}{cccc} \widehat{\cdot} \ : & l^2(h\mathbb{Z}) & \to & L^2\left(\left]-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right[\right) \\ & v & \mapsto & \widehat{v}, \end{array}$$

avec

$$\widehat{v}(\xi) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} e^{-ijh\xi} v_j h, \quad \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right].$$

Il est également possible de reconstruire la suite v *si* $\widehat{v}$ *est connue sur* $[-\pi/h, \pi/h]$ *: si* $j \in \mathbb{Z}$ *est fixé, on multiplie en effet l'équation par* $e^{ijh\xi}$ *et on intègre sur l'intervalle* $[-\pi/h, \pi/h]$*. On obtient*

$$\int_{-\pi/h}^{\pi/h} \widehat{v}(\xi)\, \delta\xi = h\int_{-\pi/h}^{\pi/h} v_j \,\delta\xi + h\sum_{k\neq j}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-i(j-k)h\xi} v_k \,\delta\xi.$$

Par périodicité, on obtient

$$v_j = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-ijh\xi}\widehat{v}(\xi)\,\delta\xi.$$

Proposition *(Formule de Parseval). Pour $v \in l^2(h\mathbb{Z})$, on a*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\widehat{v}(\xi)|^2 \, \delta\xi = \|v\|_h^2.$$

Proposition *(Transformée de Fourier et suite translatée). Le paramètre $l \in \mathbb{Z}$ étant fixé, la suite $\tau_l v$ définie par $(\tau_l v)_j := v_{j+l}$ pour $v \in l(h\mathbb{Z})$ est telle que*

$$\widehat{\tau_l v}(\xi) = e^{ilh\xi}\widehat{v}(\xi), \xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right].$$

Théorème *(CNS de stabilité (1)). Un schéma aux différences finies est stable au sens l^2 si et seulement s'il existe une constante C telle que le coefficient d'amplification g vérifie $|g(h\xi)| \leq 1 + Ck$, $\forall \xi \in [-\pi/h, \pi/h]$.*

Théorème *(CNS de stabilité (2)). Si g ne dépend pas explicitement de k et h, alors une CNS pour assurer la stabilté au sens l^2 du schéma aux différences finies est $|g(h\xi)| \leq 1$, $\forall \xi \in [-\pi/h, \pi/h]$.*