

TP3 : Interpolation par éléments finis Lagrange

Exercice - 1 Calculs préliminaires

On considère un triangle $T = (S_1, S_2, S_3)$, où $S_i, i = 1 \dots 3$ désignent les sommets.

Q-1 : Transformation élémentaire

Donner l’expression de la transformation affine bijective, F_T qui envoie le triangle de référence $\hat{T} = (\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3)$ sur le triangle T . On rappelle que le triangle de référence a pour sommets $\hat{S}_1 = (0, 0)$, $\hat{S}_2 = (1, 0)$, $\hat{S}_3 = (0, 1)$. Donner l’expression de la matrice jacobienne

$$\text{DXF} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \hat{y}} & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix}. \text{ Et vérifier que son déterminant } J = \det(\text{DXF}) \text{ est constant.}$$

Q-2 : Fonctions de base locale P_1 Lagrange

- On désigne par $\mathcal{P}_1(\hat{T})$ l’espace des polynômes de degré total 1 sur le triangle de référence \hat{T} . Construire en le justifiant une base $(\hat{\varphi}_i), i = 1 \dots 3$ qui satisfait la propriété $\hat{\varphi}_i(\hat{S}_j) = \delta_{ij}$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker (c’est-à-dire $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$ et 0 sinon).
- Montrer que la base $(\varphi_i), i = 1 \dots 3$ définie par $\varphi_i = \hat{\varphi}_i \circ F_T^{-1}$ est une base de $\mathcal{P}_1(T)$ qui vérifie $\varphi_i(S_j) = \delta_{ij}$.
- Il vient de la question précédente que si (\hat{x}, \hat{y}) sont les coordonnées d’un point générique sur le triangle \hat{T} et si (x, y) sont celles de son image par F_T , on peut écrire sans ambiguïté, pour un entier i , l’égalité

$$\hat{\varphi}_i(\hat{x}, \hat{y}) = \varphi_i(x, y). \text{ Exprimer alors } \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}} \text{ en fonction de la matrice DXF et de } \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}.$$

Q-3 : Fonctions de base locale P_2 Lagrange.

Reprendre l’exercice précédent avec les espaces $\mathcal{P}_2(\hat{T})$, $\mathcal{P}_2(T)$.

Q-4 : Formules de Quadrature

- Donner des formules de quadrature $(\hat{\omega}_q, (\hat{x}_q, \hat{y}_q)), q = 1 \dots n_q$ exactes pour les polynômes de degré total 1, 3 et 5 sur le triangle de référence \hat{T} .
- Ecrire une fonction `matlab` comme ci-dessous, qui prend en entrée un triangle donné par la matrice X_i de ses sommets, l’ordre des fonctions de base (1 ou 2), l’ordre de la quadrature et qui retourne
 - la valeur des fonctions de base ”chapeau” et de leurs dérivées : $\hat{\varphi}_i, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{x}}, \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \hat{y}}$, aux points de quadrature $(\hat{\omega}_q, (\hat{x}_q, \hat{y}_q)), q = 1 \dots n_q$.
 - la formule de quadrature $(\omega_q, (x_q, y_q)), q = 1 \dots n_q$ dans le triangle courant T (Rappel $\omega_q = \hat{\omega}_q J(\hat{x}_q, \hat{y}_q)$).

— script matlab/octave pour l’évaluation des fonctions de base aux points de quadrature —

```

%%
%% Computes the local basis functions and their derivatives on quadrature vertices
%% INPUTS :
%%   X array 3 x 2 of vertices coordinates of the triangle
%%   polyorder : polynomial order
%%   quadorder : quadrature order (the quadrature is exact for quadorder polynomials)
%% OUTPUTS : PhQ: array nq x nph of value of basis function on quadrature points (quads)
%%           (nq: number of quadrature points, nph: number of basis functions
    
```

```

%%      dxPhQ : array nq x nph of derivatives % first variable of basis on quads
%%      dyPhQ : array nq x nph of derivatives % second variable of basis on quads
%%      weight: array nq x 1, weights in the current triangle
%%      XYQ    : array nq x 2, coordinate of quads on the current triangle
%%              (particularly useful when building rhs elementary vector)
%%
%%  COURS D'ÉLÉMENTS FINIS
%%  M2PRO 2007-2008      Lab AN-EDP Univ d'ORSAY
%%  (c) Jean-Baptiste Apoung Kamga (July 2007)
%%
function [PhQ, dxPhQ, dyPhQ, weight,XYQ]=Lagrangebasis_and_deriv_on_quad(X,polyorder,quadorder)

```

Exercice - 2 Applications

Q-1 : Erreur d'interpolation locale.

On considère le triangle T dont les coordonnées des sommets sont $X = h \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$. On considère aussi la fonction $u(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$.

1. Pour les valeurs de $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}, \frac{1}{32}$.
 - (a) Donner les composantes (U_i^1) de l'interpolé P_1 Lagrange u_h^1 de u sur T .
Calculer l'erreur $\|u - u_h^1\|_{L^2(T)}, \|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)}$.
 - (b) Donner les composantes (U_i^2) de l'interpolé P_2 Lagrange u_h^2 de u sur T .
Calculer l'erreur $\|u - u_h^2\|_{L^2(T)}, \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)}$.
2. Représenter graphiquement les courbes

$$h \longmapsto \|u - u_h^1\|_{L^2(T)}, \quad h \longmapsto \|u - u_h^2\|_{L^2(T)},$$

$$h \longmapsto \|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)}, \quad h \longmapsto \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)},$$

pour les valeurs de h ci-dessus (voir question 1).

3. En utilisant, les représentations graphiques, proposer un moyen d'estimer les valeurs des paramètres $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ tels que :

$$\|u - u_h^1\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\alpha_1}, \quad \|u - u_h^2\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\alpha_2},$$

$$\|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\beta_1}, \quad \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(T)} \leq Ch^{\beta_2}.$$

Où C est une constante ne dépendant que de u .

Q-2 : Erreur d'interpolation globale.

On suppose le maillage **quasi-uniforme**. Dédire les valeurs des paramètres $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ tels que :

$$\|u - u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha_1}, \quad \|u - u_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\alpha_2},$$

$$\|\nabla u - \nabla u_h^1\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\beta_1}, \quad \|\nabla u - \nabla u_h^2\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{\beta_2}.$$

Où C est une constante ne dépendant que de u .