TP 1 : Un premier exemple d' éléments finis P1-Lagrange en dimension 1

On cherche à résoudre un problème modèle d'équation elliptique du second degré en dimension 1.

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

On considère l'ouvert $\Omega =]0,1[$, $f \in L^2(\Omega)$ et

$$H = \left\{ v \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ tel que } v' \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \text{ et } v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

Q-1 **:** Montrer que la solution u de l'équation (1) vérifie le problème variationnel suivant

$$\forall v \in H, \quad \int_\Omega u'(x) v'(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v(x)\, dx. \tag{2}$$

On utilise la méthode des éléments finis de type $P1$ pour trouver une solution approchée de ce problème. On considère un maillage du domaine Ω, c'est-à-dire une suite de points

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = 1,$$

et H_h le sous-espace de H défini par

$$H_h = \left\{ v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ est affine, et } v_h(0) = v_h(1) = 0 \right\}.$$

Q-2 **:** Montrer que H_h est de dimension finie, calculer sa dimension, expliciter les fonctions de base $\varphi_i \in H_h$ définies par

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{i,j}.$$

Q-3 **:** Vérifier que toute fonction $v_h \in H_h$ s'écrit

$$v_h = \sum_{i=1}^{n} v_i \varphi_i,$$

avec $v_i = v_h(x_i)$.

Q-4 **:** Vérifier que le problème variationnel

$$\forall v_h \in H_h, \quad \int_\Omega u_h'(x) v_h'(x)\, dx = \int_\Omega f(x) v_h(x)\, dx, \tag{3}$$

revient à la résolution d'un système linéaire

$$AU = b.$$

On donnera l'expression de la matrice A et du second membre b.

Q-5 **:** Calculer explicitement A, b. Pour calculer le second membre, on utilisera la formule de quadrature approchée

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x)\, dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \left(\psi(x_{i+1}) + \psi(x_i) \right).$$

Q-6 : Ecrire une fonction `Matlab`

```
function [A,b]=laplace1D(n,f)
```

qui construit la matrice A et le second membre b pour un maillage uniforme formé de n points internes.

Q-7 : Résoudre le système $AU = b$ lorsque $f = 1$ et dessiner la solution à l'aide de la commande `plot`.

Q-8 : On choisit f pour que la fonction $u(x) = sin(\pi x)$ soit la solution exacte du problème (1).

1. Faites varier le pas h du maillage de $\frac{1}{100}$ à $\frac{1}{10}$ par pas de $\frac{1}{100}$ et représenter graphiquement à l'échelle logarithmique l'erreur $e_h = \|u - u_h\|_{L^2(0,1)}$ en fonction de h.
2. Déterminer graphiquement les valeurs approchées des constantes C et α telles que

   $$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \approx Ch^\alpha$$

   et conclure.