Examen d'Éléments Finis – Décembre 2007

La plupart des questions sont indépendantes les unes des autres. Si vous ne savez pas répondre à une d'entre elles, vous pouvez passer à la question suivnate en supposant admis les résultats précédents. les documents tels que notes de cours, TD ainsi que codes `Matlab` sont autorisés.

Les résultats des questions théoriques devront être fournis sur papier et pour les résultats des questions numériques, on rendra un répertoire contenant tous les listings des programmes (le plus commenté possible) avec un script permettant de les lancer avec les bons paramètres. Les figures pourront également être imprimés sur papier.

Problème - 1 *Problème en une dimension 1 : Equation de convection-diffusion*

On considère le problème suivant de diffusion-transport mono-dimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\epsilon u'' + \beta u' & = & 0 & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) & = & 0, & \\ u(1) & = & 1, & \end{array} \right. \tag{1}$$

avec ϵ et β des constantes positives.

Q-1 **: Solution analytique.**

1. Montrer que la solution exacte du problème (1) est $u(x) = \dfrac{\exp(\frac{\beta}{\epsilon}x) - 1}{\exp(\frac{\beta}{\epsilon}) - 1}$.
2. Montrer que $\exp(y) - 1 \approx \left\{ \begin{array}{lll} y & \text{si} & 0 \leq y \ll 1, \\ \exp(y) & \text{si} & y \gg 1. \end{array} \right.$, où le signe $\ll$ signifie très petit et le signe $\gg$ signifie très grand. En déduire que $u(x) \approx \left\{ \begin{array}{lll} x & \text{si} & \frac{\beta}{\epsilon} \ll 1, \\ \exp(-\dfrac{\beta}{\epsilon}(1-x)) & \text{si} & \frac{\beta}{\epsilon} \gg 1. \end{array} \right.$
3. Conclure que lorsque $\frac{\beta}{\epsilon} \gg 1$, il y a apparition d'une couche limite au voisinage de 1. Donner la largeur de cette couche limite.

Q-2 **: Formulation variationnelle.**

1. Montrer que la formulation variationnelle du problème (1) est

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u \in H^1(0,1) \text{ avec } u(0) = 0, u(1) = 1 \text{ tel que,} \\ \epsilon \int_0^1 u'v' + \beta \int_0^1 u'v \, dx = 0, \forall v \in H_0^1(0,1), \end{array} \right. \tag{2}$$

où $H^1(0,1) = \left\{ v \in L^2(0,1);\ v' \in L^2(0,1) \right\}$, $\quad H_0^1(0,1) = \left\{ v \in H^1(0,1);\ v(0) = v(1) = 0 \right\}$.

2. Comment peut-on montrer l'existence et l'unicité de la solution de ce problème ?

Q-3 **: Discrétisation par éléments finis.**

On considère un maillage $0 = x_1 < \ldots < x_{N_{so}-1} < x_{N_{so}} = 1$, du domaine $]0,1[$.

1. Ecrire un script `Matlab` pour résoudre le problème (1) par éléments finis P1 et P2 Lagrange.

2. Représenter sur un même graphique les solutions P1, P2, l'interpolé P1 de la solution P2 ainsi que la solution exacte pour $\beta = 1, \epsilon = 0.01$.
3. Commenter les résultats obtenus, en mettant en évidence les oscillations numériques de la solution calculée.

Q-4 **: Justification de l'apparition des oscillations.**

Dans cette question on suppose que le maillage est uniforme de pas h et donné par :

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_N = 1.$$

Ce qui correspond à une numérotation des sommets à partir de 0.

On introduit l'espace $X_h^1 = \left\{v_h \in \mathcal{C}^0([0,1]) \text{ tel que } u_h|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1, \forall 0 \leq i \leq N-1\right\}$, dont une base est constituée des fonctions $(\phi_i)_{0\leq i\leq N}$, définies par $\phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$. ($\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronnecker).

1. Donner les expressions des $\phi_i, i = 0, \ldots N$ ainsi que celles de leurs dérivées premières.
2. Montrer que la solution approchée s'écrit $u_h = u_0\phi_0 + u_1\phi_1 + \ldots u_{N-1}\phi_{N-1} + u_N\phi_N$, avec $u_0 = 0$, $u_N = 1$.
3. Montrer que le problème discret se met sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Chercher } u = (u_0, \ldots, u_N)^t \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tel que ,} \\ (P_e - 1)u_{i+1} + 2u_i - (P_e + 1)u_{i-1} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N-1, \\ u_0 = 0, \quad u_N = 1. \end{array}\right. \tag{3}$$

   où $P_e = \frac{\beta h}{2\epsilon}$ est une grandeur appelée nombre de Péclet local.
   On se propose de résoudre explicitement l'équation (3). On remarque que c'est une equation récurrente linéaire du second ordre, dont on peut chercher la solution sous la forme $u_i = \rho^i$.
   (a) Montrer alors que ρ vérifie l'équation *caractéristique* $(P_e - 1)\rho^2 + 2\rho - (P_e + 1) = 0$.
   (b) Trouver les racines ρ_1 et ρ_2 de cette équation et conclure qu'il existe des constantes C_1 et C_2 telles que $u_i = C_1\rho_1^i + C_2\rho_2^i, \forall 0 \leq i \leq N$.
   (c) Déterminer les constantes C_1, C_2, en utilisant la condition aux limites $u_0 = 0$, $u_N = 1$, et conclure que la solution de (3) est $u_i = \dfrac{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^i}{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^N}, \quad i = 0, \ldots, N.$
4. Montrer que pour $P_e > 1$, certains composantes u_i de la solution de l'équation (3) son négatives, et par conséquent, que la solution par éléments finis P_1 Lagrange Oscille.
5. Montrer qu'il n'y a pas d'oscillation numérique si $P_e < 1$. Quelle est, dans ce cas, la relation entre h, β et ϵ ?

Q-5 **: Correction des oscillations.**

On choisit de remplacer la viscosité physique ϵ par une viscosité artificielle $\epsilon_h = \epsilon + \theta_h$, où θ_h est une fonction du pas du maillage h et de β, tendant vers zéro lorsque h tend vers zéro.

1. Montrer que dans ce cas le nombre de Péclet local devient $P_e = \frac{\beta h}{2\epsilon + 2\theta_h}$. En déduire un critère de choix de θ_h pour que $P_e < 1$.
2. Représenter sur un même graphique les solutions P1, P2, l'interpolé P1 de la solution P2 ainsi que la solution exacte pour $\beta = 1, \epsilon = 0.01, \theta_h = \frac{\beta h}{2}$.
3. Comparer les résultats ainsi obtenus à ceux de la question Q-3.

Problème - 2 *Problème en dimension 2 : modification de code*

Dans cet exercice, Ω désigne un ouvert polyédrique de $\mathbb{R}^2$.

On dispose d'un code `Matlab` qui résoud par éléments finis P1 Lagrange, sur maillage triangulaire, le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Où f et g sont des fonctions régulières definies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Description du code fourni.

Le code mis à disposition réalise les fonctionnalités suivantes :

1. Lecture du maillage fourni dans un fichier au format *.msh* de `EMC2`.
   Fonction fournie `function [Maillage] = lectureMaillage(fichierdumaillage)`.
2. Assemblage de la matrice globale A et du second membre global F. La fonction rattachée est `function [A, F]=assemble(Maillage)`.
3. Introduction des conditions aux limites de Dirichlet par modification de A, et F. Fonction fournie : `function [A,F] = conditionLimite(Maillage, A, F, LabelFrontiere)`. Cette fonction peut être appelée plusieurs fois si la condition de Dirichlet porte sur des morceaux de la frontière ayant des labels différents.
4. Représentation graphique de la solution.
   Fonction fournie `function [res] = dessineSolution(Maillage,U)`.

Cahier des charges :
Il est question de modifier le code fourni de sorte à résoudre l'équation de la chaleur (5).

Q-1 **: Appropriation du code.**

Découper la fonction `function [A, F]=assemble(Maillage)` en deux fonctions :
`function [A]=assembleA(Maillage)`, et `function [F]=assembleF(Maillage)`.

Valider sur un cas simple de votre choix.

Q-2 **: Modification du code**

Quelles modifications doit-on apporter pour résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta u &= f \text{ dans } \Omega, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

où β est une constante positive donnée.

Q-3 **: Application**

On s'intéresse à la résolution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f \text{ dans } \Omega\times]0, T[, \\ u &= g \text{ sur } \partial\Omega, \\ u &= u_0 \text{ à } t = 0, \end{cases} \tag{5}$$

où T est le temps final. Les fonctions f et g sont considérées indépendantes du temps.

On opte pour un schéma implicite en temps. On découpe l'intervalle $[0, T]$ en m intervalles uniformes de pas δ_t, on pose $t_k = k\delta_t, k = 0, \dots, m$ et on désigne par u^k la solution à l'instant t_k.

1. En effectuant la semi-discrétisation temporelle de (5), montrer qu'à chaque étape k, le passage de u^k à u^{k+1} se réduit à la résolution d'un problème du type (4).
2. Proposer alors un algorithme de résolution du problème (5).
3. Implémenter et valider cet algorithme pour les données $f = 1, g = 0, u_0 = 0, T = 1, m = 10$. Le domaine $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ est doté d'un maillage triangulaire (carree.msh) fourni avec le code.