Examen de première session
Mercredi 14 mai 2014 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

où $f \in C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, (les entiers p et d, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On considère une subdivision uniforme $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = (t_0 + T)$ de $[t_0, t_0 + T]$, de pas $h = T/N$ ($N \in \mathbb{N}^*$) et d'instants $t_n = t_0 + nh$ ($0 \le n \le N$). On cherche une valeur approchée x_n de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$.

Exercice- 1 *Questions de cours*

Dans cet exercice $T < \infty$, t_0 et d sont quelconques, et p sera à préciser. On suppose f lipschitzienne en espace, uniformément en temps, de constante de Lipschitz L. Pour $\theta \in [0, 1]$, on définit la méthode suivante :

$$(\mathcal{S}_0) \begin{cases} x_0 &= x^0, \\ x_{n+1} &= x_n + h\left(\theta p_{n,1} + (1 - 2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4}\right), \quad n = 0, \ldots, N-1 \\ p_{n,1} &= f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} &= f(t_n + \frac{h}{4}, x_n + \frac{h}{4}p_{n,1}), \\ p_{n,3} &= f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}p_{n,2}), \\ p_{n,4} &= f(t_n + h, x_n + h\left(\theta p_{n,1} + (1 - 2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4}\right)). \end{cases} \tag{2}$$

Q-1 : Etudier suivant les valeurs de θ le caractère constructible de ce schéma.

Q-2 : Donner le tableau des coefficients de ce schéma de Runge-Kutta.

Q-3 : Etudier le degré d'exactitude de la formule d'intégration principale associée.

Q-4 : Si ce schéma était convergent, quel serait son ordre maximum de convergence ?

Q-5 : Quel ordre de régularité (p) devrait avoir la fonction f pour garantir cet ordre de convergence ?

Q-6 : On suppose $\theta > 0$. Montrer qu'il existe un pas h_* tel que pour tout h vérifiant $h \le h_0 < h_*$, (avec $h_0 \in \mathbb{R}$), le schéma $(\mathcal{S}_0)$ est stable. On précisera un majorant de la constante de stabilité.

Q-7 : Etudier la consistance de ce schéma pour $h \le h_0 < h_*$. (*On pourra supposer* $d = 1$).

Exercice- 2 *Construction et analyse d'un schéma à un pas d'ordre 3.*

Dans cet exercice, $T < \infty, d = 1, p \ge 3$ et t_0 quelconque.On définit par récurrence les fonctions $f^{[k]}(t, y)$ pour tout $0 \le k < p$ par :

$$f^{[0]}(t, y) = f(t, y) \text{ et } f^{[k+1]}(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t, y) + \frac{\partial}{\partial y} f^{[k]}(t, y) f(t, y).$$

On suppose que pour tout $0 \le k \le p$, $f^{[k]}$ est lipschitzienne en espace (i.e par rapport à sa seconde variable) uniformément en $t \in [t_0, t_0 + T]$, de constante L_k.

Partie I : Construction

Q-1 : Montrer que la solution de (ED) appartient à $C^{p+1}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$ et vérifie :

$$x^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(t, x(t)), \quad 0 \le k \le p. \tag{3}$$

Q-2 : **Premier essai :** On considère le schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) + \frac{h^2}{2} f^{[1]}(t_n, x_n) + \frac{h^3}{6} f^{[2]}(t_n, x_n), \quad n \in \{0, \dots, N\}, \\ x_0 \quad \text{donné.} \end{cases} \tag{4}$$

Q-2-1 : Identifier la fonction $\Phi_2(\cdot, \cdot, \cdot)$ telle que le schéma s'écrive $x_{n+1} = x_n + h\Phi_2(t_n, x_n, h)$.
Q-2-2 : Montrer que le schéma est stable.
Q-2-3 : Montrer que le schéma est convergent d'ordre 3 exactement.
Q-2-4 : Fournir des constantes S_2 et C_2 telles que

$$\max_{0 \le n \le N} |x(t_n) - x_n| \le S_2 \Big(|x(t_0) - x_0| + TC_2 h^3 \Big). \tag{5}$$

Q-3 : **Amélioration :** élimination du terme coûteux $f^{[2]}(\cdot, \cdot)$.
On considère à présent le schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \dots, N\}, \\ x_0 \quad \text{donné,} \end{cases} \tag{6}$$

où $\Phi(t, y, h) = f(t, y) + haf^{[1]}\left(t + \alpha h, y + \beta hf(t, y)\right)$ avec α, β, a des paramètres à déterminer.

Q-3-1 : Montrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$, indépendante de h, telle que

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, y^*, h)| \le \Lambda |y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-3-2 : En déduire que quelque soit les valeurs de α, β, a, le schéma résultant est stable.

Q-4 : **Exploitation de l'erreur de consistance**

Soit $\xi(t, h) = x(t + h) - x(t) - h\Phi(t, x(t), h)$ l'erreur de consistance du schéma à l'instant t.
Q-4-1 : Montrer qu'il existe un unique triplet $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\xi(t, h) = \mathcal{O}(h^4).$$

Q-4-2 : En déduire que le schéma est consistant d'ordre au moins 3.
Q-4-3 : En prenant un cas particulier de $f(\cdot, \cdot)$, montrer que le schéma n'est pas d'ordre 4.
Q-4-4 : En déduire que

$$\xi(t, h) = R(t, x(t))\, h^4 + \mathcal{O}(h^5), \tag{7}$$

avec $R(\cdot, \cdot)$ une fonction non identiquement nulle définie par

$$R(t, y) = \frac{1}{4!} f^{[3]}(t, y) - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial h^3}(t, y, 0). \tag{8}$$

On pose dans la suite $K = \dfrac{1}{2} \sup\limits_{(t,y) \in \mathcal{D}} |R(t, y)|$, où $\mathcal{D} = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t \in [t_0, t_0 + T], |y| \le \sup\limits_{t \in [t_0, t_0 + T]} |x(t)|\}$.

Partie II : Estimation a priori

Q-5 : **Erreur globale**

Soit $e_n = x(t_n) - x_n$ l'erreur globale à l'instant $t_n, n = 0, \dots, N$.

Q-5-1 : Montrer que pour tout entier n tel que $0 \le n \le N - 1$, on a $|e_{n+1}| \le (1 + \Lambda h)|e_n| + Kh^4$.
Q-5-2 : En déduire qu'il existe une constante $S \ge 0$ telle que

$$\max_{0 \le n \le N} |x(t_n) - x_n| \le S(|x(t_0) - x_0| + TKh^3). \tag{9}$$

Partie III : Estimation a posteriori

On désigne toujours par $(x_n)_{0\leq n\leq N}$ la suite générée par le schéma précédent pour les valeurs de a, α, β obtenues mais avec cette fois une donnée initiale exacte : $x_0 = x(t_0)$. On souhaite fournir une approximation calculable de l'erreur globale $e_n = x(t_n) - x_n$ à l'instant t_n pour $n = 0, \dots, N-1$.

Q-6 : Préliminaire :

Soit $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot)$ une fonction définissant un schéma à un pas que l'on suppose stable. Montrer que pour tout en entier $q \geq 1$, les deux suites $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ et $(z_n)_{0\leq n\leq N}$ initialisées par $y_0 = z_0$ et définies par

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(t_n, y_n, h) & n = 0, \dots, N-1 \\ z_{n+1} = z_n + h\varphi(t_n, z_n, h) + \mathcal{O}(h^{q+1}) & \end{cases} \tag{10}$$

vérifient

$$z_n = y_n + \mathcal{O}(h^q) \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}. \tag{11}$$

Q-7 : Equation de l'erreur

Q-7-1 : Montrer que la suite $e_n = x(t_n) - x_n, \quad n = 0, \dots, N$ vérifie

$$\begin{cases} e_0 = 0 \\ e_{n+1} = e_n + h\Big(\Phi(t_n, x(t_n), h) - \Phi(t_n, x_n, h)\Big) + \xi(t_n, h), \qquad n = 0, \dots, N-1. \end{cases} \tag{12}$$

Q-7-2 : En déduire que $\bar{e}_n = \dfrac{e_n}{h^3}$ vérifie

$$\begin{cases} \bar{e}_0 = 0, \\ \bar{e}_{n+1} = \bar{e}_n + h\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x(t_n))\bar{e}_n + R(t_n, x(t_n))\Big) + \mathcal{O}(h^2), \qquad n = 0, \dots, N-1. \end{cases} \tag{13}$$

Q-8 : On considère à présent l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} e'(t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, x(t))\, e(t) + R(t, x(t)) \\ e(t_0) = 0, \end{cases} \tag{14}$$

dont le schéma d'Euler explicite associé est donné par :

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x(t_n))\, v_n + R(t_n, x(t_n))\Big) \quad n = 0, \dots, N-1 \\ v_0 = 0, \end{cases} \tag{15}$$

Q-8-1 : En utilisant (13) et (15) et la question préliminaire, montrer que $\forall n \in \{0, \dots, N\}$

$$e_n = v_n h^3 + \mathcal{O}(h^4) \qquad \text{et} \qquad e_n = e(t_n)h^3 + \mathcal{O}(h^4). \tag{16}$$

Q-8-2 : Quelles sont les limitations des résultats (16) au niveau pratique ?

Q-9 : On considère la suite $(w_n)_{0\leq n\leq N}$ définie par

$$\begin{cases} w_0 = 0, \\ w_{n+1} = w_n + h\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x_n)\, w_n + R(t_n, x_n)\Big) \quad n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \tag{17}$$

Q-9-1 : Montrer que si $p \geq 4$, on a

$$e_n = w_n h^3 + \mathcal{O}(h^4) \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}. \tag{18}$$

Q-9-2 : Donner une utilité pratique d'un résultat comme (18) ?