

Feuille de TD n° 3 Contrôle de pas dans les schémas à un pas

Dans cette fiche on considère les schémas à un pas pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, (l'entier r , ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier N fixé, et on pose $h = T/N$ et $t_n = t_0 + nh$ ($0 \leq n \leq N$). On désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$. Dans toute la suite on admettra les régularités nécessaires sur f pour que les calculs aient un sens.

Exercice- 1 *Notions d'erreurs*

On considère l'équation différentielle (1), ainsi que le schéma numérique à un pas (2), supposé convergent d'ordre p , pour sa résolution numérique

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_0 = x^0. \end{cases} \quad (2)$$

Définition (erreur locale) : On appelle erreur locale du schéma (2) à l'instant t au point y , la quantité

$$\xi(t, y, h) = x(t+h) - (y + h\Phi(t, y, h)) \quad (3)$$

où x est solution de $x'(s) = f(s, x(s)) \quad s \in]t, t+h[, \quad x(t) = y$.

Cette écriture de l'erreur locale introduit une fonction que l'on appelle fonction principale d'erreur :

Définition (fonction principale) : On appelle fonction principale erreur du schéma (2), la fonction $\tau(\cdot, \cdot)$ telle que :

$$\xi(t, y, h) = \tau(t, y)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \quad (4)$$

Q-1 : Quelle relation y'a-t-il entre l'erreur de consistance à l'instant t et la fonction principale d'erreur.

Q-2 : **Exemples de fonctions principales d'erreurs.**

On considère le schéma de Runge-Kutta à deux étages

$$(S) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h(\alpha_1 p_{n,1} + \alpha_2 p_{n,2}) \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n) \\ p_{n,2} = f(t_n + \mu h, x_n + h\mu p_{n,1}) \end{cases} \quad (5)$$

Q-2-1 : Montrer que

$$\begin{aligned} \xi(t, y, h) = & (1 - \alpha_1 - \alpha_2)f(t, y)h + h^2 \left(\frac{1}{2} - \alpha_2\mu \right) (f_t + f_y f)(t, y) \\ & + \frac{1}{2}h^3 \left[\left(\frac{1}{3} - \alpha_2\mu^2 \right) (f_{tt} + 2f_{ty}f + f f_{yy}f) + \frac{1}{3}f_y (f_t + f_y f) \right] (t, y) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (6)$$

où, $f_s = \frac{\partial f}{\partial s}$, $f_{sz} = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z}$, $s, z \in \{t, y\}$.

Q-2-2 : En déduire que la condition pour que le schéma (5) soit au minimum d'ordre 2 conduit à une famille de schémas à un paramètre $\alpha_2 \neq 0$, dont la fonction principale d'erreur est donnée par

$$\tau(t, y) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4\alpha_2} \right) (f_{tt} + 2f_{ty}f + ff_{yy}) + \frac{1}{3} f_y (f_t + f_y f) \right] (t, y), \quad (7)$$

Q-2-3 : Quelle valeur de α_2 conduit au schéma du point milieu (ou d'Euler modifié) ? En déduire la fonction principale d'erreur associée au schéma d'Euler modifié.

Q-2-4 : Quelle valeur de α_2 conduit au schéma de Heun ? En déduire la fonction principale d'erreur associée au schéma de Heun.

Q-2-5 : Proposer un meilleur choix de α_2 et en déduire le schéma résultant, ainsi que la fonction principale d'erreur associée.

Exercice-2 Estimation asymptotique de l'erreur globale

On considère l'équation

$$\begin{cases} e'(t) &= \frac{\partial f}{\partial y}(t, x(t))e(t) + \tau(t, x(t)) \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \\ e(t_0) &= 0. \end{cases} \quad (8)$$

Dans laquelle $x(t)$ est solution de l'équation (1).

Soit $\{\bar{e}_n\}$ la suite générée par une perturbation de sa discrétisation par le schéma d'Euler explicite :

$$\begin{cases} \bar{e}_{n+1} &= \bar{e}_n + h \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x(t_n))\bar{e}_n + \tau(t_n, x(t_n)) \right) + \mathcal{O}(h^2) \quad n = 0, \dots, N-1, \\ \bar{e}_0 &= 0. \end{cases} \quad (9)$$

Q-1 : Montrer que

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad \bar{e}_n = e(t_n) + \mathcal{O}(h) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0. \quad (10)$$

Q-2 : Soit x solution de (1) et $\{x_n\}$ la suite générée par le schéma (2) supposé convergent d'ordre $p \geq 1$.

Montrer que pour tout $n = 0, \dots, N-1$, on a

$$\phi(t_n, x(t_n), h) - \phi(t_n, x_n, h) = \frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x(t_n)) (x(t_n) - x_n) + \mathcal{O}(h^{p+1}). \quad (11)$$

Q-3 : On définit, pour tout $n = 0, \dots, N-1$, l'erreur globale à l'instant t_n par $e_n = x(t_n) - x_n$. Montrer que

$$e_{n+1} = e_n + h [\phi(t_n, x(t_n), h) - \phi(t_n, x_n, h)] + \tau(t_n, x(t_n))h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \quad (12)$$

Q-4 : Déduire de ce qui précède que

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad x(t_n) - x_n = e(t_n)h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0. \quad (13)$$

Exercice- 3 *Approximation de l'erreur globale*

On suppose que l'on dispose d'un approximation d'ordre 1 de la fonction principale d'erreur : c'est-à-dire $\exists \tau_a(\cdot, \cdot, \cdot) \in C^1([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R})$ telle que

$$\tau_a(t, y, h) = \tau(t, y) + \mathcal{O}(h) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0. \quad (14)$$

Q-1 : Montrer que $\tau_a(t_n, x_n, h) = \tau(t_n, x(t_n)) + \mathcal{O}(h)$.

Q-2 : On définit alors la suite $\{\bar{v}_n\}$ à partir de la suite $\{x_n\}$ comme suit (*dans la pratique x_n et \bar{v}_n sont générés simultanément*) :

$$\begin{cases} \bar{v}_{n+1} &= \bar{v}_n + h \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_n, x_n) \bar{v}_n + \tau_a(t_n, x_n, h) \right) \quad n = 0, \dots, N-1, \\ \bar{v}_0 &= 0. \end{cases} \quad (15)$$

Montrer que

$$\forall n \in \{0, \dots, N\}, \quad x(t_n) - x_n = \bar{v}_n h^p + \mathcal{O}(h^{p+1}) \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0. \quad (16)$$

Q-3 : En déduire un algorithme permettant de contraindre l'erreur globale à être à chaque instant en dessous d'un seuil donné : c'est à dire pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$ on ait $|x(t_n) - x_n| \leq tol$ où tol est une quantité donnée.

Exercice- 4 *Approximation de la fonction principale d'erreur*

On considère $\phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ associée à un schéma à un pas convergent d'ordre $p \geq 1$, et de fonction principale d'erreur $\tau(\cdot, \cdot)$

Q-1 : Extrapolation de Richardson

On pose

$$\begin{cases} y_h = y + h\phi(t, y, h) \\ y_{\frac{h}{2}} = y + \frac{h}{2}\phi(t, y, \frac{h}{2}) \\ y_h^* = y_{\frac{h}{2}} + \frac{h}{2}\phi(t + \frac{h}{2}, y_{\frac{h}{2}}, \frac{h}{2}). \end{cases} \quad (17)$$

et on définit

$$\tau_a(t, y, h) = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^p} \frac{y_h^* - y_h}{h^{p+1}}$$

Montrer que $\tau_a(t, y, h) = \tau(t, y) + \mathcal{O}(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Q-2 : Méthodes emboîtées

Soit $\phi^*(\cdot, \cdot, \cdot)$ associée à un schéma d'ordre $p + 1$ au moins.

on définit

$$\tau_a(t, y, h) = \frac{\phi^*(t, y, h) - \phi(t, y, h)}{h^p}$$

Q-2-1 : Montrer que $\tau_a(t, y, h) = \tau(t, y) + \mathcal{O}(h)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Q-2-2 : Donnez un exemple de pair (ϕ, ϕ^*) à votre connaissance.