© *J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

Feuille de TD n° 2 Schémas de Runge-Kutta

Dans cette fiche on considère les schémas de Runge-Kutta pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$*, (l'entier* r*, ainsi que les réels* t_0 *et* T *seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier* N *fixé, et on pose* $h = T/N$ *et* $t_n = t_0 + nh$ $(0 \leq n \leq N)$*. On désigne par* x_n *une valeur approchée de* $x(t_n)$ *pour tout* $n \in \{0, \dots N\}$*. Sauf mention spéciale, on supposera (on le rappellera parfois) que* f *lipschitzienne en espace, de constante de Lipschitz* $L \geq 0$ *:* $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$*,* $\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2, \forall\, t \in [t_0, t_0 + T]$*.*

Partie - 1 *Schémas de Runge-Kutta : Application du cours*

Exercice- 1 *Généralisation du résultat du cours*

Soit $\sigma_1, \dots \sigma_q$ des points 2 à 2 distincts de $[0, 1]$ et $\lambda_1, \dots \lambda_q \in \mathbb{R}$, des points tels que

$$\int_0^1 Q(s)\, ds = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i Q(\sigma_i) \quad \forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad deg(Q) \leq m, \text{avec } m \geq q - 1.$$

Montrer que $\forall \varphi \in C^{m+1}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R}), \exists C \geq 0$ tel que : $\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$,

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s)\, ds - h \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi(t + \sigma_i h) \right| \leq C h^{m+2}, \qquad \text{avec} \quad C = \frac{\max\limits_{s \in [t_0, t_0+T]} |\varphi^{(m+1)}(s)|}{(m+1)!}.$$

[*On pourra, si possible, compléter les noeuds* $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ *avec* $\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_{m+1}$*, et utiliser le résultat sur l'interpolation polynomiale de Lagrange.*] **Remarque : ce résultat nous dit que toute formule d'intégration approchée (peu importe le nombre de points !) dans l'intervalle** $I \in \mathbb{R}$**, exacte pour les polynômes de degré** m **fournit une approximation en** $\mathcal{O}(|I|^{m+2})$ **de l'intégrale de toute fonction de classe** C^{m+1}**.**

Exercice- 2 *Application à la méthode RK4*

Q-1 **:** Quel est le degré maximum des polynômes pour lesquels la formule de Simpson $\int_0^1 g(s)ds \simeq \frac{1}{6}g(0) + \frac{4}{6}g(\frac{1}{2}) + \frac{1}{6}g(1)$ est exacte ?

Q-2 **:** Préciser l'entier p maximal pour lequel on peut affirmer que si $\varphi \in \mathcal{C}([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$ suffisamment régulière il existe une constante $C \geq 0$ telle que : $\forall h \in [0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$,

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - \frac{h}{6} \left(\varphi(t) + 4\varphi(t + \frac{h}{2}) + \varphi(t + h) \right) \right| \leq C h^p.$$

On n'oubliera pas de préciser la régularité de φ.

Q-3 **:** Ecrire le schéma RK4. Que peut-on déduire des résultats précédents sur l'ordre du schéma RK4 ?

Partie - 2 *Schémas de Runge-Kutta : Etude de quelques schémas explicites*

Exercice- 1

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{2}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et f suffisamment régulière.

Q-1 **:** On considère la formule d'intégration approchée suivante

$$\int_0^1 g(s)ds \simeq \frac{1}{8}\Big(g(0) + 3\,g(\frac{1}{3}) + 3\,g(\frac{2}{3}) + g(1)\Big).$$

Q-1**-**1 **:** Montrer qu'elle est exacte pour les polynômes de degré 3.
Q-1**-**2 **:** En déduire que si $\varphi \in \mathcal{C}^4([0,T];\mathbb{R})$ il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall h \in [0,T[, \forall t \in [0, T-h], \quad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)ds - \frac{h}{8}\Big[\varphi(t) + 3\varphi(t+\frac{h}{3}) + 3\varphi(t+\frac{2h}{3}) + \varphi(t+h)\Big] \right| \leq Ch^5.$$

Q-2 **:** On se donne le schéma numérique suivant

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \ldots N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{8}\big(p_{n,1} + 3p_{n,2} + 3p_{n,3} + p_{n,4}\big), \quad n \in \{0, \ldots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n - \frac{h}{3}p_{n,1} + hp_{n,2}), \\ p_{n,4} = f\Big(t_n + h, x_n + h\big(p_{n,1} - p_{n,2} + p_{n,3}\big)\Big). \end{cases}$$

Q-2**-**1 **:** Quelle est la formule d'intégration principale associée ?
Q-2**-**2 **:** Justifier, sans faire de calcul, que ce schéma ne peut pas être d'ordre supérieur à 4.
Q-2**-**3 **:** Étudier la stabilité de ce schéma.
Q-2**-**4 **:** Ce schéma est-il consistant ? est-il convergent ?
(*Attention ! Il n'est pas demandé de déterminer l'ordre de consistance ni de convergence*).

Exercice- 2

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{3}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et $f \in \mathcal{C}^3([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q-1 **:** Une nouvelle formule d'intégration numérique.

Q-1**-**1 **:** Trouver les coefficients $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que la formule

$$\int_0^1 g(s)ds \simeq a\,g(0) + b\,g(\frac{2}{3}) \text{ soit exacte pour les polynômes de degré} \leq 1.$$

Cette formule reste-t-elle exacte pour les polynômes de degré 2 ?

Q-1-2 : En déduire que si $\varphi \in \mathcal{C}^3([0,T];\mathbb{R})$ alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall h \in [0,T], \forall t \in [0,T-h], \quad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)ds - h\left(a\,\varphi(t) + b\,\varphi(t+\frac{2h}{3})\right) \right| \leq Ch^4.$$

Q-2 : On se donne le schéma numérique défini par :

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0,\dots N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}p_{n,1} + \frac{3}{4}p_{n,2}\right), \quad n \in \{0,\dots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,1}). \end{cases}$$

Q-2-1 : Quelle est la formule d'intégration principale associée ?
Q-2-2 : Étudier la stabilité de ce schéma.
Q-2-3 : Montrer que ce schéma est exactement d'ordre 2.
Q-2-4 : Ce schéma est-il convergent ?

Q-3 : On se donne le schéma numérique défini par $x_0 = x^0$ et

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0,\dots N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}p_{n,1} + \frac{3}{4}p_{n,3}\right), \quad n \in \{0,\dots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{3}, x_n + \frac{h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,2}). \end{cases}$$

Q-3-1 : Quelle est la formule d'intégration principale associée ?

Q-3-2 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-3-3 : Montrer que ce schéma est consistant d'ordre 3.

Q-3-4 : Ce schéma est-il convergent ?

Q-4 : Reprendre la question **Q-2** Avec le schéma suivant :

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0,\dots N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n + h\left(\frac{1}{4}p_{n,1}\frac{3}{8}p_{n,2} + \frac{3}{8}p_{n,3}\right), \quad n \in \{0,\dots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3}p_{n,2}). \end{cases}$$

On pourra utiliser en le justifiant que : $2f\left(t + \frac{2}{3}h, x(t+\frac{2}{3}h)\right) - g(t, x(t), h) = \mathcal{O}(h^3)$, *avec*
$g(t,y,h) = f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t,y)\right) + f\left(t + \frac{2}{3}h, y + \frac{2h}{3}f(t + \frac{2h}{3}, y + \frac{2h}{3}f(t,y))\right)$.

Partie - 3 *Schémas de Runge-Kutta : quelques exemples de schémas implicites*

Exercice- 1 *Approche générale*

On considère le problème différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x^0. \end{cases} \tag{4}$$

où $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et f suffisamment régulière.

On se donne le schéma numérique de Runge-Kutta implicite suivant :

$$(RK) \begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots N\}, x_0 \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{4}\left(3p_{n,2} + p_{n,3}\right), \quad n \in \{0, \dots N-1\} \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \dfrac{h}{3}, x_n + \dfrac{h}{6}(p_{n,1} + p_{n,2})), \\ p_{n,3} = f(t_n + h, x_n + \dfrac{h}{4}(3p_{n,2} + p_{n,3})) \end{cases}$$

$\boxed{\textbf{Q-}1 \quad \textbf{:}}$ **Formule d'intégration numérique principale**

Q-1-1 : Quelle est la formule d'intégration numérique principale associée à ce schéma ?

Q-1-2 : Quel est le degré maximal des polynômes pour lesquels elle est exacte ?

Q-1-3 : Déterminer l'entier m maximal tels que $\forall \varphi \in \mathcal{C}^3([0, T], \mathbb{R})$ il existe une constante $C \geq 0$ vérifiant $\forall h \in]0, T], \forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$, on ait

$$\left| \int_t^{t+h} \varphi(s) ds - \frac{h}{4}\left(3\varphi(t + \frac{h}{3}) + \varphi(t+h)\right) \right| \leq Ch^m.$$

$\boxed{\textbf{Q-}2 \quad \textbf{:}}$ **Constructibilité du schéma**

Q-2-1 : Etablir qu'il existe $h_* > 0$ tel que l' on puisse définir trois fonctions p_1, p_2, p_3 sur $[0, T-h], \times \mathbb{R} \times [0, h_*[$ qui vérifient

$$\begin{cases} p_1(t, y, h) = f(t, y), \\ p_2(t, y, h) = f(t + \dfrac{h}{3}, y + \dfrac{h}{6}(p_1(t, y, h) + p_2(t, y, h))), \\ p_3(t, y, h) = f(t + h, y + \dfrac{h}{4}(3p_2(t, y, h) + p_3(t, y, h))). \end{cases}$$

Q-2-2 : Conclure que le schéma de Runge-Kutta (RK) est constructible.

$\boxed{\textbf{Q-}3 \quad :}$ **Stabilité du schéma**

Q-3-1 **:** Soit $0 < h_0 < h_*$, montrer que les fonctions p_1, p_2, p_3 définies ci-dessus sont Lipschitziennes par rapport à leur seconde variable si $0 \leq h \leq h_0$.

Q-3-2 **:** Soit $(\eta_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{R}^N$ donné, on considère le schéma perturbé :

$$\begin{cases} h = \frac{T}{N}, t_n = nh \quad n \in \{0, \dots N\}, \tilde{x_0} \in \mathbb{R} \text{ donné}, \\ \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n + \dfrac{h}{4}\,(3\tilde{p}_{n,2} + \tilde{p}_{n,3}) + \eta_n, \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \\ \tilde{p}_{n,1} = f(t_n, \tilde{x}_n), \\ \tilde{p}_{n,2} = f(t_n + \dfrac{h}{3}, \tilde{x}_n + \dfrac{h}{6}(\tilde{p}_{n,1} + \tilde{p}_{n,2})), \\ \tilde{p}_{n,3} = f(t_n + h, \tilde{x}_n + \dfrac{h}{4}(3\tilde{p}_{n,2} + \tilde{p}_{n,3})). \end{cases}$$

Justifier que cette suite $(\tilde{x}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est bien définie.
Montrer qu'il existe une constante $S > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\tilde{x}_n - x_n| \leq S \left(|\tilde{x}_0 - x_0| + \sum_{j=0}^{N-1} |\eta_j| \right), \forall\, 0 \leq n \leq N.$$

Que peut-on en conclure pour le schéma de Runge-Kutta (RK) ?

$\boxed{\textbf{Q-}4 \quad :}$ **Consistance et ordre du schéma**
Soit x la solution de (1). Pour tout $0 < h \leq h_0, t \in [0, T-h]$, on définit l'erreur locale de troncature

$$\xi(t,h) = x(t+h) - x(t) - \frac{h}{4}\Big(3p_2(t, x(t), h) + p_3(t, x(t), h)\Big),$$

et on pose

$$\xi_0(t,h) = \int_t^{t+h} f(s, x(s))ds - \frac{h}{4}\left(3f(t + \frac{h}{3}, x(t + \frac{h}{3})) + f(t+h, x(t+h))\right),$$

l'erreur due à la formule d'intégration numérique puis

$$\xi_2(t,h) = \frac{3h}{4}\Big(f(t + \frac{h}{3}, x(t + \frac{h}{3})) - p_2(t, x(t), h)\Big),$$

$$\xi_3(t,h) = \frac{h}{4}\Big(f(t+h, x(t+h)) - p_3(t, x(t), h)\Big).$$

Q-4-1 **:** Vérifier que

$$\xi(t,h) = \xi_0(t,h) + \xi_2(t,h) + \xi_3(t,h).$$

Q-4-2 **:** Comment se comporte l'erreur de troncature si la fonction f est indépendante de la variable d'espace ? Que peut-on en conclure sur l'ordre de la méthode (RK) ?

Q-4-3 **:** Majorer chaque erreur $\xi_i(t,h), i = 2, 3$ puis donner l'ordre de consistance du schéma (RK).

Exercice- 2 *Application*

Soit T un réel donné et $f \in C^3([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ lipschitzienne en espace, de constante de Lipschitz $L \geq 0$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), t \in]0, T[$$

associée à la condition initiale $x(0) = x^0$. L'entier N étant fixé, on pose $h = T/N$ et $t_n = nh$ $(0 \leq n \leq N)$. Pour $\theta \in [0,1]$, on définit la méthode suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\left(\theta p_{n,1} + (1-2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4}\right), \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{4}, x_n + \frac{h}{4}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}p_{n,2}), \\ p_{n,4} = f(t_n + h, x_n + h\left(\theta p_{n,1} + (1-2\theta)p_{n,3} + \theta p_{n,4}\right)). \end{cases}$$

Faire l'étude de cette méthode en fonction de θ (*constructibilité, intégration principale, ordre de précision, stabilité*) et donner une estimation d'erreur générale du type $\max\limits_{0 \leq n \leq N}(|x(t_n) - x_n|) \leq S(|x^0 - x_0| + CTh^p)$, avec S et C dans $\mathbb{R}^+$ constantes positives et $p \in \mathbb{N}$.

Exercice- 3 *Un schéma de Runge-Kutta avec surévaluation de la formule d'intégration principale*

Soit T un réel donné et $f \in C^4([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On suppose toujours f Lipschitzienne en espace de constante $L > 0$.

On considère le schéma suivant

$$(S) \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}\right), \quad n \in \{0, \dots N\}, \\ p_{n,1} = f(t_n, x_n), \\ p_{n,2} = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}p_{n,1}), \\ p_{n,3} = f(t_n + h, x_n + \frac{h}{6}\left(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}\right)). \end{cases}$$

Q-1 : Quelle est sa formule d'intégration principale ?

Q-2 : soit $h_0 \in]0, T[$ tel que $h_0 L < 6$ et soit $0 < h \leq h_0, t \in [0, T-h]$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose

$$p_1(t,y,h) = f(t,y), \qquad p_2(t,y,h) = f(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}p_1(t,y,h))$$

Montrer qu'il existe un unique $p_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$p_3 = f(t+h, y + \frac{h}{6}\left(p_1(t,y,h) + 4p_2(t,y,h) + p_3\right))$$

On le note $p_3(t,y,h)$. En déduire que le schéma (S) est constructible.

Q-3 : Montrer que, si $0 < h \leq h_0, t \in [0, T-h]$, les fonctions p_1, p_2, p_3 sont lipschitziennes par rapport à y, uniformément en t et h. On donnera explicitement des constantes de Lipschitz possibles.

Q-4 : Pour x solution du problème (1) et pour tous $0 < h \leq h_0, t \in [0, T-h]$, on pose :

$$\xi(t,h) = x(t+h) - x(t) - \frac{h}{6}\Big(p_1(t,x(t),h) + 4p_2(t,x(t),h) + f(t+h, x(t+h))\Big)$$

Q-4-1 : Montrer qu'il existe une constante K indépendante de h telle que l'on a l'estimation

$$|\xi(t,h)| \leq Kh^3.$$

Q-4-2 : Quelle est l'ordre de la méthode (S) ? Commenter sur le choix du calcul de $p_{n,2}$ par rapport à la précision de la formule d'intégration numérique.