© *J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>*

Feuille de TD n° 1 Schémas à un pas explicites et implicites

Dans cette fiche on considère les schémas à un pas implicites pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, (l'entier r, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier N fixé, et on pose $h = T/N$ et $t_n = t_0 + nh$ $(0 \le n \le N)$. On désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \dots N\}$.

Partie - 1 *Schémas à un pas explicites : Application du cours*

Exercice- 1 *De l'équation différentielle d'ordre $p \ge 2$ au système d'équations différentielles d'ordre* 1

Le but de cet exercice est d'écrire quelques équations différentielles ordinaires (edo) d'ordre $p \ge 2$ sous la forme des systèmes d'équations différentielles ordinaires d'ordre 1. Ceci étant, dans la suite, on ne présentera et n'étudiera les méthodes numériques que dans le contexte des edo ou systèmes d'edo du premier ordre.

Q-1 : Pour chacune des équations différentielles ordinaires ci-dessous, préciser l'entier d, les réels t_0, T, la fonction $f : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, le vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^d$, la nouvelle inconnue $x : [t_0, t_0 + T] \to \mathbb{R}^d$ permettant de la ramener sous la forme

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

$$(a) \begin{cases} y''(t) + \frac{g}{L} y(t) = 0, \ t \in]0, 1] \\ y(0) = 0, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} LCv''(t) + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C\right) v'(t) + \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) v(t) = e, \\ \qquad t \in]0, 100], \\ v(0) = 0, \ v'(0) = 0. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y''(t) = \mu(1 - y^2) y'(t) - y(t), \ t \in]0, 10], \\ y(0) = 1, \ y'(0) = 1. \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} y'''(t) - 4y''(t) + 5y'(t) - 2y(t) = 0, \ t \in]a, b] \\ y(a) = 0, \ y'(a) = a, y''(a) = 2. \end{cases}$$

Notes : *dans toute la suite de cette fiche, on ne considérera que des équations de la forme (2).*

Exercice- 2 *Schémas explicites à un pas : Exemples*

Pour résoudre numérique le problème (2), (lorsque $T < \infty$) on se donne un entier $N \in \mathbb{N}$, on définit le pas de temps $h = \frac{T}{N}$ et on décompose l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$: $\quad t_0 < t_0 + h < \ldots < t_0 + Nh = t_0 + T$.
Puis on cherche des valeurs x_n approchant les valeurs $x(t_n)$ de la solution exacte $x(t)$ aux temps $t_n = t_0 + nh$.

On rappelle, selon les notations d'Henrici, qu'un **schéma numérique à un pas explicite** pour la résolution du problème (2) est défini par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \qquad n = 0, \dots, N-1, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{cases} \tag{3}$$

où $\Phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ est une certaine fonction dépendant de f.

Q-1 : Préciser la fonction Φ pour chacun des schémas ci-dessous

Q-1-1 : Schéma d'**Euler explicite (1768)** :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{array}\right.$$

Q-1-2 : Schéma du **point milieu ou de Runge (1895)** :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right) \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{array}\right.$$

Q-1-3 : Schéma de **Heun ou Euler amélioré (1900)** :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n)\right) \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{array}\right.$$

Q-2 : Pour chacun des schémas ci-dessus, rappeler brièvement la démarche de sa construction.

Exercice- 3 *Schémas explicites à un pas : Notion de Consistance*

On rappelle que l'erreur de consistance à l'instant t_n du schéma (3), est la quantité :

$$\varepsilon(t_n, h) = x(t_n + h) - x(t_n) - h\Phi(t_n, x(t_n), h).$$

Q-1 : **Interprétation :** Soit x^*_{n+1} la solution fournie par le schéma à l'instant t_{n+1}, lorsqu'on part d'une solution exacte à l'instant t_n.

1. Établir une relation entre $x^*_{n+1}, x(t_{n+1})$ et $\varepsilon(t_n, h)$.
2. En vous servant d'un dessin, donnez une interprétation de la différence $x^*_{n+1} - x_{n+1}$.

Q-2 : On se place ici en dimension $d = 1$ et on suppose la fonction f dans (2) de classe C^p, $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On désigne par $x^{(j)}$ la j-ème dérivée de x. Montrer que $\forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$

$$\forall 0 \leq j \leq p \quad x^{(j+1)}(t) = f^{[j]}(t, x(t)) \quad \overset{\text{def}}{=} \quad \frac{\partial f^{[j-1]}}{\partial t}(t, x(t)) + f(t, x(t))\frac{\partial f^{[j-1]}}{\partial y}(t, x(t)),$$

   où on a posé $f^{[0]}(t, x(t)) = f(t, x(t))$.
2. Conclure que $\forall t \in [t_0, t_0 + T - h]$

$$\varepsilon(t, h) = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{h^{j+1}}{j!}\left(\frac{f^{[j]}}{(j+1)}(t, x(t)) - \frac{\partial^j \Phi}{\partial h^j}(t, x(t), 0)\right) + O(h^{p+1}).$$

3. En déduire une condition de consistance d'ordre $\geq p$ du schéma (3). [*On rappelle que le schéma (3) est consistant d'ordre $\geq p$ si et seulement si $\varepsilon(t, h) = O(h^{p+1})$*]

Q-3 : **Applications :** Quels sont les ordres de consistance des schémas présentés ci-dessus (Exercice 2). [*On supposera d'abord la fonction f suffisamment régulière, puis on donnera pour chacun des schémas la régularité minimale sur f nécessaire pour mener l'étude de l'ordre de consistance.]*

NB : *On rappelle que le schéma (3) est consistant d'ordre exactement p s'il est consistant d'ordre $\geq p$ mais n'est pas consistant d'ordre $\geq p+1$. Ainsi pour montrer qu'on schéma est consistant d'ordre exactement p, on montre qu'il est consistant d'ordre $\geq p$, puis on cherche un exemple qui met en défaut la consistant d'ordre $\geq p+1$.*

Exercice- 4 *Schémas explicites à un pas : Notion de Stabilité*

Q-1 : Quand dit-on que le schéma (3) est stable. ?

Q-2 : Rappeler les hypothèses suffisantes sur Φ assurant la stabilité du schéma (3) lorsque T est fini. Sous quelles conditions sur la donnée f, ces hypothèses sont-elles satisfaites ?

Q-3 : Utiliser la question précédente pour montrer que les schémas donnés à l'exercice 2 sont stables. [*on prendra soin d'exhiber la constante de stabilité.*]

Partie - 2 *Schémas à un pas explicites : Application du cours*

Exercice- 1 *Étude d'un schéma à un pas*

On considère le schéma

$$(S)\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_n + hf(t_n, x_n)\right) & n \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d \text{ donné.} \end{cases}$$

Avec f une fonction de classe C^2, uniformément Lipschitzienne en espace.

Q-1 : Préciser la fonction $\Phi(t, y, h)$ pour que ce schéma s'écrive $x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)$.

Q-2 : Étudier la consistance, l'ordre de précision de ce schéma.

Q-3 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-4 : Ce schéma est-il convergent ? Si oui, quel est son ordre de convergence ?

Exercice- 2 *Un exemple de schéma implicite : partiel (Mars 2008)*

On suppose, en plus des hypothèse susmentionnées, que f est de classe $C^2([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R})$. On considère alors le schéma suivant

$$(S)\begin{cases} \bar{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n, x_n) + f(t_n + \frac{h}{3}, \bar{x}_{n+1})\right) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4}\left(3f(t_n + \frac{h}{3}, \bar{x}_{n+1}) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) \end{cases} \quad n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Q-1 : Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

Q-2 : Montrer que ce schéma est constructible.

Q-3 : Ce schéma est-il stable ?

Q-4 : Calculer l'ordre du schéma et en déduire une majoration de l'erreur.

Exercice- 3 *Étude du θ-schéma*

On considère le schéma implicite, dans lequel $\theta \in [0, 1]$ et où f est une fonction de classe C^2 sur $I \times \mathbb{R}^d$ uniformément lipschitzienne en espace :

$$(S_\theta) \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\left[\theta f(t_n, x_n) + (1-\theta) f(t_{n+1}, x_{n+1})\right] & n \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ x_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4}$$

Q-1 : Ce schéma est-il constructible ?

Q-2 : Analyser en fonction de θ, l'erreur locale de consistance.

Q-3 : Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-4 : Étudier en fonction des valeurs de θ la convergence de ce schéma, en donnant dans chaque cas l'estimation d'erreur.

Q-5 : Proposer en fonction des valeurs de θ un moyen de calculer les valeurs approchées de x_n.[*on distinguera le cas* $\theta = \frac{1}{2}$ *et le cas* $\theta \neq \frac{1}{2}$].

Exercice- 4 *Analyse du schéma à un pas explicite dans un domaine non borné*

On considère l'équation différentielle $x'(t) = \alpha x(t)$ associée à la donnée de Cauchy $x(0) = x_0$. (où α est un paramètre réel donné).

Q-1 : Calculer explicitement la suite $(x_n)_{n\in\{0,\dots,N\}}$ obtenue à l'aide du schéma d'Euler explicite.

Q-2 : Donner l'expression de l'erreur locale de troncature, et de l'erreur globale.

Q-3 : Donner les comportements de ces erreurs lorsque T est fixé et $N \to \infty$ et lorsque h est fixé et $N \to \infty$ (donc lorsque $T \to \infty$).

Exercice- 5 *Analyse du schéma à un pas explicite dans un domaine non borné*

Reprendre l'exercice précédent en utilisant cette fois le schéma du point milieu.

Exercice- 6 *Exemple d'accélération de convergence*

Soit $T > 0$ donné, $d \geq 1, N \geq 1$ et une fonction $f \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$. Le but de cet exercice est de transformer la méthode d'Euler explicite de pas $h = T/N$ notée, en posant $t_n^h = nh (0 \leq n \leq N)$

$$x_{n+1}^h = x_n^h + hf(t_n^h, x_n^h), \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \tag{5}$$

En une méthode d'ordre 2 en utilisant le processus dit de Richardson, pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T], \tag{6}$$

cette équation différentielle admettant une unique solution x de classe C^3 uniformément bornée sur $[0, T]$.

Q-1 : Montrer qu'il existe une unique fonction z de classe C^2 sur $[0, T]$ vérifiant le problème

$$\begin{cases} z'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t))z(t) + \frac{1}{2}x''(t), \ t \in [0, T], \\ z(0) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Q-2 : Soit ε_n^h l'erreur locale de troncature du schéma d'Euler explicite (5). Montrer l'existence d'une constante C telle que l'on a la majoration

$$\|\varepsilon_n^h - \frac{h^2}{2}x''(t_n^h)\| \leq Ch^3, \quad n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Q-3 : Montrer que l'erreur $e_n^h = x(t_n^h) - x_n^h$ (définie pour $0 \leq n \leq N$) est telle que

$$e_{n+1}^h = e_n^h + h\left(f(t_n^h, x(t_n^h)) - f(t_n^h, x_n^h)\right) + \varepsilon_n^h.$$

Q-4 : En posant $\tilde{e}_n^h = e_n^h/h$, en déduire à l'aide d'un développement de Taylor que l'on a

$$\tilde{e}_{n+1}^h - \tilde{e}_n^h = h\left(f(t_n^h, x(t_n^h))\tilde{e}_n^h + \frac{1}{2}x^{''}\right)(t_n^h) + \beta(h),$$

où β est telle que $\|\beta(h)\| \leq Mh^2$, $\|\cdot\|$ désignant une norme quelconque sur $\mathbb{R}^d$.

Q-5 : A l'aide du développement de Taylor de $z(t_{n+1}^h)$ centré en t_n^h, démontrer qu'en posant $\delta_n^h = z(t_n^h) - \tilde{e}_n^h$, il existe deux constantes K et C positives telles que pour $n \in \{0, \ldots, N-1\}$, on a $\|\delta_n^h\| \leq (1+Kh)\|\delta_n^h\| + Ch^2$.

Q-6 : En conclure l'existence d'une constante M positive telle que l'on a l'estimation $\|e_n^h - hz(t_n^h)\| \leq Mh^2$ lorsque $n \in \{0, \ldots, N\}$.

Q-7 : On définit la famille $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ par $y_n = 2x_{2n}^{h/2} - x_n^h, \forall n \in \{0, \ldots, N\}$ et $y_0 = x(0)$. Déduire de ce qui précède que l'on a $\max\limits_{0\leq n\leq N}\left(\|x(t_n^h) - y_n\|\right) \leq Ch^2$.

Exercice- 7 *Exemple de construction d'un schéma d'ordre supérieur à* 2

Soit $f(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne de classe C^3. On considère l'équation différentielle, pour tout $t \in [0, T]$:

$$(p) \qquad x'(t) = f(x(t)), x(0) = x_0.$$

Pour $h > 0$ et $Nh = T$, On définit le schéma numérique explicite

$$x_{n+1} - x_n = hF(x_n, h), \quad n = 0, \ldots, N-1,$$

où

$$F(y,h) = Af(y) + Bf(x + \beta hf(y)) + Cf\left(y + hf(y + hf(y))\right),$$

avec $A, B, C, \beta \geq 0$.

Q-1 : Montrer que le schéma est stable. Pour quelles valeurs de A, B, C ce schéma est-il consistant ?

Q-2 : Montrer que le développement de Taylor de $h \mapsto f(y + \beta hf(y))$ à l'ordre 2 lorsque $h \to 0$ est :

$$f(y + \beta hf(y)) = f(y) + \beta hf(y)f'(y) + \frac{\beta^2 h^2}{2}f^2(y)f^{''}(y) + \mathcal{O}(h^3).$$

Q-3 :

1. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction $\mathcal{F}(t) = f\left(y + tf(y + tf(y))\right)$.
2. En déduire que le développement de Taylor de $h \mapsto f\left(y + tf(y + tf(y))\right)$ à l'ordre 2 lorsque $h \to 0$ est :

$$f\left(y + tf(y + tf(y))\right) = f(y) + hf(y)f'(y) + h^2\left[\frac{1}{2}f^2(y)f^{''}(y) + f(y)f^{'2}(y)\right] + \mathcal{O}(h^3).$$

Q-4 : En déduire une expression de la forme

$$hF(y,h) = hX + h^2Y + h^3Z + \mathcal{O}(h^4),$$

où X, Y, Z sont indépendants de h et seront calculés explicitement.

Q-5 : Si x(t) est solution de (E), écrire le développement de Taylor à l'ordre 3 de $x(t)$ lorsque $h \to 0$.

Q-6 : En identifiant les coefficients pour que la méthode soit d'ordre 3, trouver un système de 4 équations pour les inconnues A, B, C, β.

Q-7 : Résoudre ce système et déterminer explicitement A, B, C, β.

Exercice- 8 *Monotonie de schémas : examen (mai 2008)*

On considère ici que $x^0 > 0$, $t_0 = 0$, $T = \infty$ et que la fonction $f(t,y) = -ry$ avec $r > 0$.

Q-1 : Montrer que la solution de l'équation est $x(t) = x^0 e^{-rt}, \quad \forall t > 0$. En déduire que cette solution est décroissante et tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Q-2 : On cherche dans cet exercice des schémas qui satisfont à cette propriété. C'est-à-dire

$$x_{n+1} \leq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

De tels schémas seront dits *monotones*. Si un schéma n'est monotone que pour certaines valeurs de h, on dit qu'il est *conditionellement monotone*. La plus grande valeur de h pour laquelle le schéma est monotone est appelée *rayon du domaine de monotonie*.

On propose les schémas suivants, initialisés par $x_0 = x^0$:
a) $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$,
b) $x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$,
c) $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\left(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right)$.

Q-2-1 : Quel nom donne-t-on à chacun d'eux ? Expliquer brièvement leur construction.
Q-2-2 : Donner le rayon du domaine de monotonie de chacun de ces schémas.
Q-2-3 : Conseiller sur le choix de l'un de ces schémas pour le problème considéré.

Exercice- 9 *Construction d'un schéma de type Taylor d'ordre 4 : examen (mai 2008)*

Dans cet exercice, on considère $T < \infty$. On suppose que la fonction f est Lipschitzienne par rapport à la variable spatiale uniformément en t de constante L, c'est-à-dire

$$|f(t,y) - f(t,y^*)| \leq L|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0+T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-1 : On définit par récurrence les fonctions $f^{[k]}(t,y)$ pour tout $0 \leq k < p$ par :

$$\begin{aligned}
&f^{[0]}(t,y) = f(t,y),\\
&\dots,\\
&f^{[k+1]}(t,y) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t,y) + \frac{\partial}{\partial y} f^{[k]}(t,y) f(t,y).
\end{aligned}$$

Montrer que la solution de (ED) appartient à $C^{p+1}([t_0, t_0+T])$ et vérifie :

$$x^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(t, x(t)), \quad 0 \leq k \leq p.$$

Q-2 : On considère le schéma numérique à un pas :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \dots, N\},\\ x_0 = x^0, \end{cases}$$

associé à

$$\Phi(t,y,h) = f(t,y) + haf^{[1]}(t,y) + h^2 b f^{[2]}\left(t + \alpha h, y + \beta h f(t,y)\right).$$

où α, β, a, b sont des paramètres à déterminer. On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont aussi Lipschitziennes par rapport à la variable spatiale uniformément en t avec constante L_1, L_2 respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$, indépendante de h, telle que

$$|\Phi(t,y,h) - \Phi(t,y^*,h)| \leq \Lambda|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0+T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-3 : On suppose que $p \geq 4$.

Q-3-1 : Vérifier que la solution $x(t)$ de (ED), satisfait, quand $h \to 0$:

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t,x(t)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(t,x(t)) + \frac{h^2}{6} f^{[2]}(t,x(t)) + \frac{h^3}{24} f^{[3]}(t,x(t)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Q-3-2 : Faire un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $h \mapsto \Phi(t,y,h)$ au voisinage de $h = 0$.

Q-3-3 **:** Déterminer les coefficients α, β, a, b de sorte que la méthode à un pas définie par la fonction $\Phi(t, y, h)$ soit d'ordre 4.

Q-3-4 **:** Que peut-on dire sur la convergence de cette méthode ?

Exercice- 10 *Schéma réversible : examen (juin 2008)*

On considère ici $t_0 = 0$, $T = 1$, $d = 2$, $x^0 = (0, 1)^T$ et $f(t, x) = (v, -y)$ où on a posé $x = (y, v)^T$.
$x(t) = (y(t), v(t))$ désigne la solution exacte de (ED). On désigne alors par $x_n = (y_n, v_n)$ une valeur approchée de $(y(t_n), v(t_n))$ pour $n = 0, \ldots N$.

Un schéma numérique pour la résolution de ce problème est dit *réversible* en temps si une étape à partir de (y_n, v_n) nous amène à (y_{n+1}, v_{n+1}) et une seconde étape à partir de $(y_{n+1}, -v_{n+1})$ nous ramène à $(y_n, -v_n)$. Autrement dit, on peut retourner à sa position de départ en inversant tout simplement sa vitesse.

On rappelle qu'un schéma explicite à un pas pour la résolution du problème (ED) est donné sous sa forme générale par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \ldots, N\}, \\ x_0 = x^0, \end{cases}$$

Où Φ est une fonction de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^d \times [0, T]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

Q-1 **:** Précisez la fonction Φ pour un schéma explicite de votre choix, en expliquant la démarche pour son obtention.

Q-2 **:** Vérifiez si votre schéma est réversible ?
Attention : *c'est tout à fait normal si votre schéma ne l'est pas, inutile donc de le modifier.*

Q-3 **:** Programmez votre schéma à travers une fonction `Matlab` dont vous commenterez les arguments d'entrée et de sortie.

Exercice- 11 *Construction d'un schéma de type Taylor d'ordre 3 : examen (juin 2008)*

Dans cet exercice, on considère $d = 1$. On suppose que la fonction f est Lipschitzienne par rapport à la variable spatiale uniformément en t de constante L, c'est-à-dire

$$|f(t, y) - f(t, y^*)| \leq L|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-1 **:** On définit par récurrence les fonctions $f^{[k]}(t, y)$ pour tout $0 \leq k < p$ par :

$$\begin{aligned} & f^{[0]}(t, y) = f(t, y), \\ & \ldots, \\ & f^{[k+1]}(t, y) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t, y) + \frac{\partial}{\partial y} f^{[k]}(t, y) f(t, y). \end{aligned}$$

Montrer que la solution de (ED) appartient à $C^{p+1}([t_0, t_0 + T])$ et vérifie :

$$x^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(t, x(t)), \quad 0 \leq k \leq p.$$

Q-2 **:** On considère le schéma numérique à un pas :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \ldots, N\}, \\ x_0 = x^0, \end{cases}$$

associé à

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y) + haf^{[1]}(t, y) + hbf^{[1]}\left(t + \alpha h, y + \beta h f(t, y)\right).$$

où α, β, a, b sont des paramètres à déterminer. On suppose que $f^{[1]}$ est Lipschitzienne par rapport à la variable spatiale uniformément en t de constante L_1. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$, indépendante de h, telle que

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, y^*, h)| \leq \Lambda|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0 + T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-3 : On suppose que $p \geq 3$.

Q-3-1 : Vérifier que la solution $x(t)$ de (ED), satisfait, quand $h \to 0$:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t,x(t)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(t,x(t)) + \frac{h^2}{6} f^{[2]}(t,x(t)) + \mathcal{O}(h^3).$$

Q-3-2 : Faire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction $h \mapsto \Phi(t,y,h)$ au voisinage de $h=0$.

Q-3-3 : Déterminer les coefficients α, β, a, b pour que la méthode à un pas définie par la fonction $\Phi(t,y,h)$ soit d'ordre 3.

Q-3-4 : Montrer que le schéma résultant dépend d'un paramètre. Conseiller alors sur le choix de ce paramètre.

Q-4 : On suppose $p \geq 3$ et on considère α, β, a, b donnés par la question Q-3-3.

On pose pour tout $n \in \{0, \ldots, n\}$, $e_n = |x(t_n) - x_n|$.

Q-4-1 : Montrer que pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N-1$, on a $e_{n+1} \leq e_n + \Lambda h e_n + \mathcal{O}(h^4)$.

Q-4-2 : Montrer que $\max\limits_{0 \leq n \leq N} |x(t_n) - x_n| = \mathcal{O}(h^3)$.

Q-4-3 : Le schéma est-il convergent ? Si oui, donner son ordre de convergence.

Partie - 3 *Schémas à un pas implicites*

Exercice- 1 *Construction d'un schéma de type Taylor d'ordre 4*

Dans cet exercice, on considère $T < \infty$. On suppose que la fonction f est Lipschitzienne par rapport à la variable spatiale uniformément en t de constante L, c'est-à-dire

$$|f(t,y) - f(t,y^*)| \leq L|y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0+T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-1 : On définit par récurrence les fonctions $f^{[k]}(t,y)$ pour tout $0 \leq k < p$ par :

$$\begin{aligned} &f^{[0]}(t,y) = f(t,y), \\ &\ldots, \\ &f^{[k+1]}(t,y) = \tfrac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t,y) + \tfrac{\partial}{\partial y} f^{[k]}(t,y) f(t,y). \end{aligned}$$

Montrer que la solution de (ED) appartient à $C^{p+1}([t_0, t_0+T])$ et vérifie :

$$x^{(k+1)}(t) = f^{[k]}(t, x(t)), \quad 0 \leq k \leq p.$$

Q-2 : On considère le schéma numérique à un pas :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \ldots, N\}, \\ x_0 = x^0, \end{cases}$$

associé à

$$\Phi(t,y,h) = f(t,y) + haf^{[1]}(t,y) + h^2 b f^{[2]}\left(t + \alpha h, y + \beta h f(t,y)\right).$$

où α, β, a, b sont des paramètres à déterminer. On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont aussi Lipschitziennes par rapport à la variable spatiale uniformément en t avec constante L_1, L_2 respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$, indépendante de h, telle que

$$|\Phi(t,y,h) - \Phi(t,y^*,h)| \leq \Lambda |y - y^*|, \forall t \in [t_0, t_0+T], \forall y, y^* \in \mathbb{R}.$$

Q-3 : On suppose que $p \geq 4$.

Q-3-1 : Vérifier que la solution $x(t)$ de (ED), satisfait, lorsque $h \to 0$:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} = f(t,x(t)) + \frac{h}{2} f^{[1]}(t,x(t)) + \frac{h^2}{6} f^{[2]}(t,x(t)) + \frac{h^3}{24} f^{[3]}(t,x(t)) + \mathcal{O}(h^4).$$

Q-3-2 : Faire un développement limité à l'ordre 3 de la fonction $h \mapsto \Phi(t,y,h)$ au voisinage de $h=0$.

Q-3-3 : Déterminer les coefficients α, β, a, b pour que la méthode à un pas définie par la fonction $\Phi(t,y,h)$ soit d'ordre 4.

Q-3-4 : Que peut-on dire sur la convergence de cette méthode ?

Exercice- 2 *Exemple de schéma implicite : impact de la résolution du problème non linéaire*

Dans cet exercice, on suppose $p = 2$, $t_0 = 0$ et $T < \infty$. L désigne la constante de Lipschitz uniforme de f en espace. On considère le schéma suivant

$$(\mathcal{S})\begin{cases} x_0 = x^0, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}\Big(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\Big) \quad 0 \le n \le N-1. \end{cases}$$

Partie I : Convergence et estimation d'erreur

Q-1 : Montrer que la méthode $(\mathcal{S})$ est constructible pour $h < h_*$, où h_* est à déterminer.

Q-2 : Montrer que la méthode $(\mathcal{S})$ est stable pour $h \le h_0$ où $h_0 < h_*$.

Q-3 : Donner l'expression de l'erreur de troncature $\varepsilon(t, h)$ de cette méthode ? Proposer une majoration de $|\varepsilon(t, h)|$ et en déduire l'existence de deux constantes $C > 0, S > 0$ telles que

$$\max_{0 \le n \le N} |x(t_n) - x_n| \le S\left(|\, x(t_0) - x_0| \; + CTh^2\right).$$

Partie II : Recherche de solution approchée

Pour tout $h \in [0, h_0], t \in [0, T-h]$ et $a \in \mathbb{R}$, on désigne par $\varphi(t, a, h)$ l'unique solution du problème suivant

$$(\mathcal{P}_f)\begin{cases} \text{chercher } z \in \mathbb{R} \quad \text{solution de,} \\ z = a + \frac{h}{2}\Big(f(t, a) + f(t+h, z)\Big). \end{cases}$$

Q-4 : Montrer que l'on définit ainsi une fonction $\varphi : [0, T] \times \mathbb{R} \times [0, h_0] \to \mathbb{R}$.

Q-5 : On pose $M = \max\limits_{t \in [0,T]}(|f(t, 0)|)$. Montrer qu'on a les propriétés suivantes :

$$|\varphi(t, a, h) \; - \varphi(t, b, h)| \le \left(1 + \frac{hL}{1 - \frac{h_0 L}{2}}\right)|a - b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$|\varphi(t, a, h)| \le \left(1 + \frac{hL}{1 - \frac{h_0 L}{2}}\right)|a| + hM \quad \forall a \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

$$|\varphi(t, a, h) - a| \le hL\left(\frac{|a|}{2} + \frac{|\varphi(t, a, h)|}{2}\right) + hM \quad \forall a \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Q-6 : En déduire l'existence de deux constantes $K_1 > 0, K_2 > 0$ telles que

$$\max_{0 \le n \le N} |x_n| \le K_1, \tag{11}$$

$$\forall n \in \{0, \dots N\} \qquad |x_{n+1} - x_n| \le hK_2. \tag{12}$$

Q-7 : On désigne par $\phi_m(t, a, h)$ la solution du problème de point fixe $(\mathcal{P}_f)$ obtenue après m itérations de la méthode de Picard, initialisée par a. C'est-à-dire

$$(\mathcal{P}_{fm})\begin{cases} \begin{cases} z_0 = a, \\ z_{l+1} = a + \frac{h}{2}\Big(f(t, a) + f(t+h, z_l)\Big) \quad 0 \le l \le m-1 \end{cases} \\ \phi_m(t, a, h) = z_m. \end{cases} \tag{13}$$

Montrer que

$$|\phi_m(t, a, h) - \varphi(t, a, h)| \le \left(\frac{hL}{2}\right)^m |\varphi(t, a, h) - a|. \tag{14}$$

Q-8 : Montrer que si dans $(\mathcal{S})$ on détermine, pour tout $0 \le n \le N-1$, x_{n+1} en utilisant m itérations de la méthode de Picard initialisée par x_n, on remplace ainsi le problème $(\mathcal{S})$ par le suivant

$$(\mathcal{S}_m)\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_{n+1} = \phi_m(t_n, y_n, h) \quad 0 \le n \le N-1. \end{cases}$$

Q-9 : Montrer que dans ce cas, il existe une constante $K > 0$ telle que l'erreur commise est

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - x_n| \leq STK \left(\frac{hL}{2}\right)^m . \tag{15}$$

Q-10 : En déduire que par rapport à la solution exacte $x(t)$, on commet une erreur dont une majoration est

$$\max_{0\leq n\leq N} |x(t_n) - y_n| \leq S|\, x(t_0) - x_0| + STh^2 \left(C + \frac{L^2K}{4}\left(\frac{hL}{2}\right)^{m-2}\right). \tag{16}$$

Q-11 : En déduire qu'il faut au moins deux itérations de la méthode de Picard par pas de temps pour espérer préserver l'ordre 2 du schéma.

Q-12 : Montrer que deux itérations de la méthode de Picard peuvent ne pas être suffisantes si l'on souhaite que l'erreur due à la résolution du problème du point fixe ne soit pas dominante dans la méthode $(\mathcal{S})$.

Q-13 : Une condition d'arrêt du type $\frac{|z_{l+1}-z_l|}{|z_l|} \leq 10^{-3}$ dans la méthode de Picard (13) est-elle raisonnable ?

Exercice- 3 *Exemple de schéma implicite*

Dans cet exercice, on suppose $d = 2$, $p = 1$, $t_0 = 0$ et $T < \infty$. On choisit de munir $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x, y)\| = |x| + |y|,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. La fonction f s'écrit $f = (f_1, f_2)$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ telles qu'il existe 2 constantes C_1 et C_2 vérifiant

$$|f_j(t, x_2, y_2) - f_j(t, x_1, y_1)| \leq C_j(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|), \forall t \in \mathbb{R}, \forall (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4, j = 1, 2.$$

Le problème (ED) s'écrit maintenant

$$(ED)\left\{\begin{array}{ll} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) & t \in]0, T],\\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), & \\ x(0) = x^0,\ \ y(0) = y^0. & \end{array}\right.$$

Pour l'approcher, on introduit la méthode suivante

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{ll} (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, & \\ x_{n+1} = x_n + hf_1(t_n, x_n, y_n), & \\ y_{n+1} = y_n + hf_2(t_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) & 0 \leq n \leq N-1. \end{array}\right.$$

Q-1 : Montrer que la méthode $(\mathcal{S})$ est constructible pour $h \leq h_*$, où l'on déterminera h_*.

Q-2 : Montrer que pour $h \leq h_0 < h_*$, la famille $(x_n, y_n)_{0\leq n\leq N}$ donnée par $(\mathcal{S})$ est uniformément bornée. On pourra définir $M_j = \max\limits_{t\in[0,T]}(|f_j(t, 0, 0)|), j = 1, 2$.

Q-3 : Montrer que la méthode $(\mathcal{S})$ est stable pour $h \leq h_0$ où $h_0 < h_*$. On précisera une constante de stabilité en fonction des données du problème.

Q-4 : Que vaut ici l'erreur de troncature $\varepsilon(t, h) = (\varepsilon_1(t, h), \varepsilon_2(t, h))$ de cette méthode ? Donner une majoration de $\|\varepsilon(t, h)\|$ et en déduire finalement une estimation de l'erreur $e_n = (x(t_n) - x_n, y(t_n) - y_n)$ (lorsque $0 \leq n \leq N$) sous la forme

$$\max_{0\leq n\leq N} \|e_n\| \leq S\left(\|\, e_0\|\ + CTh\right),$$

où les constantes S et C seront évaluées en fonction des données du problème.

Q-5 : Que donne ce schéma dans le cas $f_1(t, x, y) = by$ et $f_2(t, x, y) = -ax$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2_+$) ? Donner l'expression de (x_{n+1}, y_{n+1}) en fonction de (x_n, y_n), pour $n \in \{0, \ldots N-1\ \}$.

Exercice- 4 *Application du cours*

On considère l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \text{pour tout} t \in [a, b], \quad x(a) = x_0, \tag{17}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ est donné et f est une fonction donnée de classe $C^2([a, b] \times \mathbb{R})$ et uniformément lipschitzienne en espace de constante de Lipschitz L. Soit N un entier fixé, $h = (b-a)/N$ et $t_i = a + ih$ pour $0 \leq i \leq N$. On propose le schéma suivant pour approcher la solution $x(t)$ de (17), à partir de x_0 :

$$(S) \begin{cases} \bar{x}_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\left(f(t_n, x_n) + f(t_n + \frac{h}{3}, \bar{x}_{n+1})\right) \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4}\left(3f(t_n + \frac{h}{3}, \bar{x}_{n+1}) + f(t_{n+1}, x_{n+1})\right) \end{cases} \qquad n \in \{0, \ldots, N-1\}.$$

Q-1 **:** Ce schéma est-il explicite ou implicite ?

Q-2 **:** Montrer que ce schéma est constructible.

Q-3 **:** Ce schéma est-il stable ?

Q-4 **:** Calculer l'ordre du schéma et en déduire une majoration de l'erreur.

Exercice- 5 *Schémas conservant certaines intégrales premières*

Une planète, assimilée à son centre de masse, a un mouvement régi par une équation différentielle ordinaire

$$x^{''}(t) + F(t, x(t)) = 0, \quad t \in]0, T], \text{ où } T \in \mathbb{R} \text{ est un réel.} \tag{18}$$

On se propose de construire des schémas numériques qui satisfont certaines propriétés conservatives.
Dans toute la suite de l'exercice, on va considérer le cas simple et scalaire suivant :

$$\begin{cases} x^{''}(t) + x(t) = 0, \qquad t \in]0, T], \\ x(0) = 0, \ x'(0) = 1. \end{cases} \tag{19}$$

Q-1 **:** Montrer que l'équation (19) peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} x^{'}(t) = v(t), \qquad t \in]0, T], \\ v^{'}(t) = -x(t), \\ x(0) = 0, \ v(0) = 1. \end{cases} \tag{20}$$

Q-2 **:** On introduit la fonction $H : [0, T] \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = \frac{1}{2}x(t)^2 + \frac{1}{2}v(t)^2$. Montrer que

$$H(t) = C, \qquad \forall t \in [0, T], \tag{21}$$

où C est une constante à déterminer. On dit alors que l'énergie est conservée au cours du temps.

PARTIE I : Schémas conservant l'énergie

On désire construire une solution approchée de (20) qui respecte au mieux la propriété de conservativité (21).

Q-3 **:** Soit alors N un entier fixé. On introduit le pas $h = \frac{T}{N}$ et un ensemble de points $t_n = nh$, $n = 0, \ldots N$. On construit les valeurs approchées de $(x(t_n), v(t_n))$ à travers le schéma

$$\begin{cases} x_0 = 0, v_0 = 1, \\ x_{n+1} = x_n + h\left[(1-\theta)v_n + \theta v_{n+1}\right], \qquad n \in \{0, \ldots, N-1\}. \\ v_{n+1} = v_n - h\left[(1-\theta)x_n + \theta x_{n+1}\right] \end{cases} \tag{22}$$

Q-3-1 **:** Montrer que ce schéma peut se mettre sous la forme

$$\begin{cases} Z_0 \quad \text{donné}, \\ Z_{n+1} = Z_n + h\left[(1-\theta)AZ_n + \theta AZ_{n+1}\right] \end{cases} \qquad n \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{23}$$

où $Z_n = (x_n, v_n)^T \ \forall n = 0, \ldots, N$ et A est une matrice carrée 2×2 à déterminer. On précisera Z_0.

Q-3-2 **:** On pose $B = I - \theta hA$. Calculer $B^T B$ et dire si ce schéma est constructible.

Q-3-3 **:** Donner l'ordre de ce schéma en fonction du paramètre θ.[*On pourra remarquer que la solution exacte $Z(t) = (x(t), v(t))$ de (20) vérifie pour tout entier k, $Z^{(k)}(t) = M_k Z(t)$ où M_k est une matrice à déterminer.*]

Q-3-4 **:** Étudier la stabilité de ce schéma.

Q-4 : Pour tout $n = 0, \dots, N$, on pose $H_n = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}v_n^2$. Établir une relation entre H_n et Z_n.

Q-4-1 : Montrer que $\quad \forall n \in 0, \dots N-1$

$$H_{n+1} = \gamma H_n, \qquad \text{où} \qquad \gamma = 1 + \frac{h^2(1-2\theta)}{h^2\theta + 1}. \tag{24}$$

Q-4-2 : Analyser la monotonie de la suite $(H_n)_{0 \le n \le N-1}$ pour les schémas suivants :
a) Euler explicite ($\theta = 0$) ; b) Euler implicite ($\theta = 1$) ; c) Crank-Nicolson ($\theta = \frac{1}{2}$).

Q-4-3 : Quelle valeur du paramètre θ conseilleriez-vous ?

PARTIE II : Recherche de schémas conservant l'aire et l'orientation

Q-5 : On reprend l'équation (22) dans laquelle on pose $\theta = \frac{1}{2}$. Pour le rendre explicite, on remplace dans la première équation v_{n+1} par $v_{n+1} = v_n - hx_n$. Ce choix est-il fondé ?

Q-5-1 : Montrer que le nouveau schéma appliqué à (22) se met sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_0 \quad \text{donné}, \\ Z_{n+1} = A(h)Z_n \end{array} \right. \qquad n \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \text{où } A(h) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{h^2}{2} & h \\ -h + \frac{h^3}{4} & 1 - \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Q-5-2 : Étudier la consistance et la stabilité de ce schéma et préciser l'estimation d'erreur de convergence en fonction des données du problème.

Q-6 : Vérifier que le schéma est symplectique. *On rappelle qu'un schéma* $\left\{ \begin{array}{l} x_{n+1} = \psi(x_n, v_n) \\ v_{n+1} = \chi(x_n, v_n) \end{array} \right.$ *est symplectique si les fonctions* $\psi(x, v)$ *et* $\chi(x, v)$ *vérifient* $\dfrac{\partial \psi}{\partial x}\dfrac{\partial \chi}{\partial v} - \dfrac{\partial \psi}{\partial v}\dfrac{\partial \chi}{\partial x} = 1$. *On dit aussi qu'il conserve l'aire et l'orientation.*

Q-7 : Montrer que l'énergie discrète vérifie la relation suivante :

$$(1 + \underline{\lambda}_h)^n H_0 \le H_n \le (1 + \overline{\lambda}_h)^n H_0 \quad \forall n \in 0, \dots N-1 \tag{26}$$

où $\underline{\lambda}_h$ et $\overline{\lambda}_h$ sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice :

$$\Lambda_h = \begin{pmatrix} -\dfrac{h^4}{4} + \dfrac{h^6}{16} & \dfrac{h^3}{4} - \dfrac{h^5}{8} \\ \dfrac{h^3}{4} - \dfrac{h^5}{8} & \dfrac{h^4}{4} \end{pmatrix} \tag{27}$$

Q-8 : Déduire de la question précédente que le schéma approche de façon raisonnable l'énergie.

Q-9 : Présenter quelques avantages et inconvénients des schémas (22) et (25).