© J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

Fiche de TP1 : Schémas de Runge Kutta explicite

Attention : *La dernière partie du présent TP (voir Thème 2) fait l'objet d'un devoir à* **rendre avant le 10 avril 2013**.

Thème - 1 *Mouvement d'un projectile avec frottements*

On souhaite étudier le déplacement d'un solide de centre de gravité G lancé à une vitesse $\overrightarrow{v}_0$ à partir du point $O(0,0)$. Pour cela, on note $M(t) = (x(t), y(t))$ la position de G à l'instant t dans le plan vertical. La relation fondamentale de la dynamique donne alors

$$m\overrightarrow{a} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}, \tag{1}$$

où $\overrightarrow{a}$ est l'accélération du projectile, m sa masse, $\overrightarrow{g} = (0, -g)^t$ la force de gravitation et $\overrightarrow{f}$ est une force de frottement définie par

$$\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} -v_x^2 \\ -\dfrac{v_y^3}{|v_y|} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

où v_x et v_y sont les deux coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$. En combinant (1) et (2) et en choisissant $m = 1$, le mouvement est décrit par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x''(t) & = & -x'(t)^2 \\ y''(t) & = & -g - \dfrac{y'(t)^3}{|y'(t)|}. \end{array} \right. \tag{3}$$

La notation $X(t) = (x(t), y(t), x'(t), y'(t))^t$ nous permet alors d'écrire le système (3) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} X'(t) = F(t, X(t)), \quad t \in]0, T[. \\ X(0) \in \mathbb{R}^4 \end{array} \right. \tag{4}$$

Exercice-1 : Partie théorique

Q-1-1 : Montrez que la fonction F est définie par

$$\left\{ \begin{array}{cccc} F: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ & \left(t, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ x_3, \\ x_4 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4, \\ -x_3^2, \\ -g - \dfrac{x_4^3}{|x_4|} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On définit la suite $(X_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 \in \mathbb{R}^4, \\ X_{n+1} = X_n + h(ap_{n,1} + bp_{n,2} + cp_{n,3} + dp_{n,4}) \\ p_{n,1} = F(t_n, X_n) \\ p_{n,2} = F\left(t_n + \dfrac{h}{4}, X_n + \dfrac{h}{4}p_{n,1}\right) \\ p_{n,3} = F\left(t_n + \dfrac{3h}{4}, X_n + \dfrac{h}{4}(2p_{n,1} + p_{n,2})\right) \\ p_{n,4} = F\left(t_n + h, X_n + \dfrac{h}{4}(p_{n,1} + p_{n,2} + 2p_{n,3})\right) \end{array} \right. \tag{5}$$

Q-1-2 : Sachant que tout schéma numérique doit être au moins consistant, les coefficients a, b, c et d peuvent-ils être indépendants ? Si non, par quelle relation sont-ils liés ?

Exercice-2 : Programmation du schéma

Q-2-1 : Écrire la fonction Matlab

```
function [Y] = F(t, X)
```

associée au système (4) (attention ici X et Y sont des vecteurs de 4 lignes). On choisira $g = 9.81 S.I.$.

Q-2-2 : Écrire une fonction Matlab

```
function [t,X]= monRK (F, T, N, X0, a, b, c, d)
```

qui calcule la suite $(X_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ du schéma (5) de pas h avec $h = \dfrac{T}{N}$.

Q-2-3 : On choisit $T = 1$, $N = 100$, $X_0 = (0, 0, 1, 20)^t$ et successivement

$$\begin{aligned} (a, b, c, d) &= (0.25, 0.75, 0, 0) \\ (a, b, c, d) &= (0.25, 0.25, 0.25, 0.25) \\ (a, b, c, d) &= (0, 0, 0, 1) \\ (a, b, c, d) &= (0.5, 0.25, 0, 0.25)\,. \end{aligned}$$

Écrire un programme Matlab `script` (en utilisant la fonction `F`) pour tracer sur une même figure le graphe de la trajectoire exacte du projectile (obtenue avec `ode45`) et la trajectoire du projectile calculée à l'aide de la méthode (5).

Exercice-3 : Calcul numérique de l'erreur

Dans toute la suite, on va calculer la solution approchée au même instant final T avec des itérations effectuées pour des valeurs du pas h différentes. On note alors $(X_n^h)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ la solution approchée de (4) avec $N = \dfrac{T}{h}$.

Q-3-1 : Montrer que s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left\| X_N^h - X(T) \right\| = \alpha h^p + o(h^p)$, alors nous avons

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\ln h} \ln \left(\left\| X_N^h - X_{2N}^{h/2} \right\| \right) = p.$$

Q-3-2 : On choisit $T = 1$, $N = 100$,

$$X_0 = (0, 0, 1, 20)^t \quad \text{et} \quad (a, b, c, d) = (0.25, 0.75, 0, 0).$$

Écrire un programme qui trace les valeurs successives de $\dfrac{1}{\ln(h)} \ln \left(\left\| X_N^h - X_{2N}^{h/2} \right\| \right)$ lorsque N varie (on prendra $N = N_0 2^k$, avec $N_0 = 10$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant 9$). On optimisera le programme pour ne pas faire deux fois les mêmes calculs.
Que peut-on en déduire sur l'ordre de la méthode (5) ?

Attention : Assurez-vous que pour chaque valeur de N le temps final calculé **`t(end)`***, coïncide effectivement avec T.*

Q-3-3 : Même question avec $(a, b, c, d) = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$.

Exercice-4 : Comparaison avec d'autres schémas

On considère un schéma à un pas convergente d'ordre $q \geq 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = X_n + h\Phi(t_n, X_n, h), \quad n \in \{0, \dots N-1\} \\ X_0 \end{array} \right. \tag{6}$$

On suppose qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que $\forall Y, Z \in \mathbb{R}^4$, on ait

$$\|\Phi(t, Y, h) - \Phi(t, Z, h)\| \leq \Lambda \|Y - Z\|, \quad \forall (t, h) \in [0, T] \times [0, T].$$

On construit un schéma de Runge-Kutta à l'aide de ce schéma de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathbb{R}^4, \\ X_{n+1} = X_n + \frac{h}{6}\Big(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}\Big), \quad n \in \{0, \dots N-1\}, \\ p_{n,1} = F(t, X_n), \\ p_{n,2} = F\left(t_n + \frac{h}{2}, X_n + \frac{h}{2}\Phi(t_n, X_n, \frac{h}{2})\right), \\ p_{n,3} = F(t_n + h, X_n + h\Phi(t_n, X_n, h)). \end{cases} \tag{7}$$

Q-4-1 **:** Montrer que le schéma (7) est stable.

Q-4-2 **:** Sans préciser son ordre de consistance, montrer que le schéma (7) est consistant. Quels sont ses ordres minimum et maximum de consistance ? Justifier.

Q-4-3 **:** Donner l'expression de Φ pour un schéma explicite d'ordre 2 de votre choix.

Q-4-4 **:** Écrire un programme Matlab permettant d'évaluer l'odre du schéma (7) pour ce choix de Φ. Les résultats étaient-ils prévisibles ? (*On prendra les paramètres de l'Exercice 3*)

Q-4-5 **:** Comparer les solutions données par les schéma (7) et (5) pour $a = b = c = d = \dfrac{1}{4}$.
(*On affichera les erreurs et les temps de calcul pour ces deux méthodes*).

Thème - 2 **A rendre avant le 10 avril 2013** *: Construction et mise en oeuvre d'un schéma de type Runge-Kutta*

Pour simplifier la construction du schéma, on se place dans un cadre scalaire. C'est-à-dire qu'on considère le problème

$$(ED) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0,$$

où $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, (l'entier p, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés.)

Exercice-1 **: Construction**

On souhaite construire un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3, dont la formule d'intégration principale ne fait intervenir que deux points d'intégration.

Q-1-1 **:** Chercher deux points τ_1, τ_2 (avec $\tau_1 < \tau_2$) appartenant à $[0, 1]$ tels que la formule d'intégration

$$\int_0^1 P(x)\,dx = \frac{1}{3}\Big(P(\tau_1) + 2P(\tau_2)\Big),$$

soit exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Q-1-2 **:** Soit $\varphi \in C^3([0, T]; \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une constante C que l'on exprimera en fonction de $\max\limits_{t \in [0,T]} |\varphi^{(3)}(t)|$ telle que

$$\forall h \in [0, T], \forall t \in [0, T-h], \qquad \left| \int_t^{t+h} \varphi(s)ds - \frac{h}{3}\Big(\varphi(t + \tau_1 h) + 2\varphi(t + \tau_2 h)\Big) \right| \le Ch^4.$$

Q-1-3 **:** On s'engage à déterminer convenablement $\widetilde{x}_n$ et $\widehat{x}_n$ pour que le schéma se mette sous la forme

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{3}\left(p_{n,\tau_1} + 2p_{n,\tau_2}\right), \quad n \in \{0, \dots N-1\}, \\ p_{n,\tau_1} = f(t_n + \tau_1 h, \widetilde{x}_n), \\ p_{n,\tau_2} = f(t_n + \tau_2 h, \widehat{x}_n), \end{cases}$$

Q-1-4 **:** Montrer que l'erreur locale de troncature à l'instant t peut se mettre sous la forme

$$\xi(t, h) = \xi_0(t, h) + \xi_1(t, h) + \xi_2(t, h),$$

où

$$\xi_0(t,h) = x(t+h) - x(t) - \tfrac{h}{3}\Big[f\left(t+\tau_1 h, x(t+\tau_1 h)\right) + 2f(t+\tau_2 h, x(t+\tau_2 h))\Big],$$

$$\xi_1(t,h) = \tfrac{h}{3}\left[f(t+\tau_1 h, x(t+\tau_1 h)) - f(t+\tau_1 h, \widetilde{x})\right],$$

$$\xi_2(t,h) = \tfrac{2h}{3}\left[f(t+\tau_2 h, x(t+\tau_2 h)) - f(t+\tau_2 h, \widehat{x})\right].$$

Q-1-5 **:** Déduire de la question précédente une majoration de $|\xi_0(t,h)\,|$.

Q-1-6 **:** En déduire que $\xi(t,h) = \mathcal{O}(h^4)$ dès que $\widetilde{x}$ et $\widehat{x}$ seront respectivement une approximation de $x(t+\tau_1 h)$ et $x(t+\tau_2 h)$ d'ordre au moins égale 3. C'est-à-dire que

$$x(t+\tau_1 h) - \widetilde{x} = \mathcal{O}(h^3) \quad \text{et} \quad x(t+\tau_2 h) - \widehat{x} = \mathcal{O}(h^3).$$

Q-1-7 **:** On choisit la méthode du point milieu pour définir $\widetilde{x}_n$ et $\widehat{x}_n$:

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_n &= x_n + \tau_1 h f\left(t_n + \frac{\tau_1 h}{2}, x_n + \frac{\tau_1 h}{2} f(t_n, x_n)\right)\\ \widehat{x}_n &= x_n + \tau_2 h f\left(t_n + \frac{\tau_2 h}{2}, x_n + \frac{\tau_2 h}{2} f(t_n, x_n)\right).\end{aligned}$$

Ce choix est-il en accord avec les objectifs.

Q-1-8 **:** Déduire l'expression suivante du schéma construit

$$(RKS)\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{h}{3}\left(p_{n,3} + 2p_{n,5}\right), \quad n \in \{0, \dots N-1\},\\[2mm] p_{n,1} = f(t_n, x_n),\\[2mm] p_{n,2} = f(t_n + \dfrac{\tau_1 h}{2}, x_n + \dfrac{\tau_1 h}{2} p_{n,1}),\\[2mm] p_{n,3} = f(t_n + \tau_1 h, x_n + \tau_1 h p_{n,2}),\\[2mm] p_{n,4} = f(t_n + \dfrac{\tau_2 h}{2}, x_n + \dfrac{\tau_2 h}{2} p_{n,1}),\\[2mm] p_{n,5} = f(t_n + \tau_2 h, x_n + \tau_2 h p_{n,4}).\end{cases}$$

Exercice-2 **: Mise en oeuvre et validations**

Q-2-1 **:** Ecrire des fonctions et scripts `Matlab`, dont on commentera le choix des arguments, en vue d'évaluer le schéma précédent dans le cadre de l'exercice 1 du thème 1.

Q-2-2 **:** Comparer ce schéma à celui de l'exercice 1 du thème 1. Et commenter les résultats obtenus.

Q-2-3 **: Critique :**

- A l'aide de `Mupad`, générer une formule de quadrature approchée sur $[0,1]$ (de type interpolation) de points $0, \dfrac{\tau_1}{2}, \tau_1, \dfrac{\tau_2}{2}, \tau_2$.
- Ecrire le schéma de Runge-kutta (RKS2) dont la formule d'intégration principale est celle obtenue, et dont les pentes sont approchées comme dans le schéma (RKS).
- Sur une équation différentielle ordinaire de votre choix, comparer numériquement (RKS2) et (RKS).
  Quelles conclusions tirez-vous de cette analyse ?