© J.-B.A.K. <jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr>

Feuille de TD n° 3 Schémas à Pas Multiples

Dans cette fiche on considère les schémas à pas multiples pour la résolution numérique de l'équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Où $f \in C^r([t_0, t_0 + T]; \mathbb{R})$, (l'entier r, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). On se donne alors un entier N fixé, et on pose $h = T/N$ et $t_n = t_0 + nh$ $(0 \leq n \leq N)$. On désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \ldots N\}$. Dans toute la suite on admettra les régularités nécessaires sur f pour que les calculs aient un sens.

Exercice- 1 *Formules de récurrences pour certains schémas à k pas*

Q-1 : Soit $P(t)$ le polynôme d'interpolation de la fonction g aux points équidistants $t_n, t_{n-1}, \ldots, t_{n-k+1}$, et $P^*(t)$ le polynôme d'interpolation de la fonction g aux points équidistants $t_{n+1}, t_n, \ldots, t_{n-k+1}$,

Montrer que

$$P(t) = g_n + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{s(s+1)\ldots(s+j-1)}{j!} \nabla^j g_n, \qquad P^*(t) = g_{n+1} + \sum_{i=1}^{k} \frac{(s-1)s(s+1)\ldots(s+j-2)}{j!} \nabla^j g_{n+1}.$$

où $s = \frac{t-tn}{h}$ et $\nabla^i g_n$ est la différence non-divisée régressive d'ordre i de g_n : $\nabla^0 g_n = g_n, \quad \nabla^{i+1} g_n = \nabla^i g_n - \nabla^i g_{n-1}$.

Q-2 : On définit le schéma d'Adams-Bashforth à k pas par :

$$x_{n+1} - x_n = \int_{tn}^{tn+1} P(t)dt, \quad n = 0, \ldots, N-k.$$

où $P(t)$ est le polynôme d'interpolation aux points $(t_i, f_i = f(t_i, x_i)), i = n, \ldots, n-k+1$.

Q-2-1 : Montrer que ce schéma s'écrit

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \nabla^i f_n, \quad n = 0, \ldots, N-k,$$

où l'expression des γ_i est à préciser.

Q-2-2 : On pose $G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i t^i$, sous réserve de convergence de la série. Montrer que $G(t) = -\frac{t}{(1-t)\log(1-t)}$

Q-2-3 : En écrivant l'expression précédente sous la forme $-\frac{\log(1-t)}{t} G(t) = \frac{1}{1-t}$, déduire la relation de récurrence :

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_m + \frac{1}{2}\gamma_{m-1} + \frac{1}{3}\gamma_{m-2} + \ldots + \frac{1}{m+1}\gamma_0 = 1, \quad m \geq 1.$$

Q-2-4 : Ecrire alors les schémas d'Adams-Bashforth à k pas , avec $k = 1, 2, 3, 4$.

Q-3 : Reprendre l'exercice pour le schéma d'Adams-Moulton, défini par

$$x_{n+1} - x_n = \int_{tn}^{tn+1} P^*(t)dt, \quad n = 0, \ldots, N-k.$$

où $P^*(t)$ est le polynôme d'interpolation aux points $(t_i, f_i = f(t_i, x_i)), i = n+1, \ldots, n-k+1$, et montrer que

$$x_{n+1} = x_n + h \sum_{i=0}^{k} \gamma_i^* \nabla^i f_{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N-k$$

avec la récurrence

$$\gamma_0^* = 1, \quad \gamma_m^* + \frac{1}{2}\gamma_{m-1}^* + \frac{1}{3}\gamma_{m-2}^* + \ldots + \frac{1}{m+1}\gamma_0^* = 0, \quad m \geq 1.$$

Exercice- 2 *Apprentissage du cours*

Q-1 : On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} x_{n+3} + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) - x_n = \frac{3+\alpha}{2} h\left(f_{n+2} + f_{n+1}\right), \quad n = 0, \ldots, N-3, \\ x_0, x_1, x_2 \quad \text{donnés.} \end{cases} \tag{2}$$

Q-1-1 : Montrer qu'il existe une valeur de α pour laquelle le schéma est consistant d'ordre 4.

Q-1-2 : Montrer que si le schéma est convergent, son ordre ne peut excéder 2.

Q-2 : On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} x_{n+3} + \alpha(x_{n+2} - x_{n+1}) - x_n = h\beta\left(f_{n+2} + f_{n+1}\right), \quad n = 0, \ldots, N-3, \\ x_0, x_1, x_2 \quad \text{donnés.} \end{cases} \tag{3}$$

Q-2-1 : Déterminer les constantes α et β pour que ce schéma soit de degré le plus élevé.

Q-2-2 : La méthode obtenue est-elle 0-stable ?

Q-3 : On considère la méthode à k pas symétriques

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=-k}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=-k}^{k} \beta_i f_{n+i}, \quad n = k, \ldots, N-k, \\ x_0, x_1, \ldots, x_{2k-1} \quad \text{donnés,} \end{cases} \tag{4}$$

avec $\alpha_{-i} = -\alpha_i, \quad \beta_{-i} = -\beta_i, \quad 0 \leq i \leq k.$

Q-3-1 : Montrer que son ordre p est nécessairement paire.

Q-3-2 : Montrer que l'erreur de troncature s'écrit

$$\xi_{n+k} = C_{p+1} h^{p+1} x^{(p+1)}(t_n) + \mathcal{O}(h^{p+3}).$$

Exercice- 3 *Construction de Schémas à k pas d'ordre maximal*

On rappelle qu'au schéma à k pas suivant

$$(S) \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \ldots, N-k, \\ x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \quad \text{donnés,} \end{cases} \tag{5}$$

avec $\alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, sont associés, les polynômes :

$$\varrho(z) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i, \quad \text{appelé, \textbf{premier polynôme} caractéristique du schéma}$$

$$\sigma(z)=\sum_{i=0}^{k}\beta_i z^i,\quad \text{appelé, \textbf{second polynôme} caractéristique du schéma}$$

Q-1 : Montrer que le schéma (S) est consistant d'ordre au moins p si et seulement si

$$\frac{\varrho(z)}{\log z}-\sigma(z)=\mathcal{O}((z-1)^p)\quad \text{quand}\quad z\to 1. \tag{6}$$

Q-2 : Application : construction de tous les schémas à deux pas stables implicites d'ordre maximum.

Q-2-1 : Montrer que dans le schéma à k pas (5), l'on peut toujours s'arranger à ce que $\alpha_k=1$.

Q-2-2 : En déduire que tous les schémas à deux pas implicites ont pour premier polynôme caractéristique

$$\varrho(z)=(z-1)(z-\lambda),\quad -1\leq\lambda<1.$$

Q-2-3 : Montrer que pour cette expression de $\varrho(z)$, lorsque $z\to 1$, on a :

$$\frac{\varrho(z)}{\log z}=(1-\lambda)+\frac{3-\lambda}{2}(z-1)+\frac{5+\lambda}{12}(z-1)^2-\frac{1+\lambda}{24}(z-1)^3+\frac{11+19\lambda}{720}(z-1)^4+\dots$$

Q-2-4 : En utilisant (6), donner l'expression des schémas à 2 pas implicites d'ordre maximum. On discutera suivant les valeurs de λ, et on précisera dans chaque cas la constante d'erreur.

Exercice- 4 *Constante d'erreur*

On considère le schéma à k pas d'ordre exactement p (polynômes caractéristiques ϱ et σ)

$$(S)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i},\quad n=0,\dots,N-k,\\ x_0,x_1,\dots,x_{k-1}\quad\text{donnés,}\end{array}\right. \tag{7}$$

pour la résolution numérique de l'équation différentielle (1), avec f suffisamment régulière.

Q-1 : Montrer que l'erreur locale de consistance à l'instant t, vérifie

$$\mathcal{L}(t,x,h)=C_{p+1}h^{p+1}x^{(p+1)}(t)+\mathcal{O}(h^{p+2}). \tag{8}$$

On donnera l'expression de C_{p+1} en fonction des coefficients $\alpha_i,\beta_i,0\leq i\leq k$ des polynômes ϱ et σ.

Q-2 : On désigne par $e_n=x(t_n)-x_n$ l'erreur globale à l'instant t_n du schéma.

Q-2-1 : On supposera que $e_j=0$ pour $j=0,\dots,k-1$. A quoi correspond cette hypothèse ?

Q-2-2 : Montrer que

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i e_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t_{n+i},x(t_{n+i}))e_{n+i}+\frac{C_{p+1}}{\sigma(1)}x^{(p+1)}(t_{n+i})\right)+\mathcal{O}(h^{p+1}) \tag{9}$$

Q-2-3 : En déduire que $e_n=e(t_n)h^p+\mathcal{O}(h^{p+1})$, où $e(t)$ est solution de

$$e'(t)=\frac{\partial f}{\partial y}(t,x(t))e(t)+\frac{C_{p+1}}{\sigma(1)}x^{(p+1)}(t),\quad e(t)=0. \tag{10}$$

Q-2-4 : Expliquer alors en quoi la quantité $\frac{C_{p+1}}{\sigma(1)}$ est-elle plus significative que C_{p+1}, et pourquoi on l'appelle **constante d'erreur** (globale) du schéma à k pas (7).

Exercice- 5 *Exemple de majoration de l'erreur de consistance*

On appelle **Noyau de Peano** du Schéma à k pas

$$(S)\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_i x_{n+i} = h\sum_{i=0}^{k}\beta_i f_{n+i}, \quad n = 0,\ldots,N-k,\\ x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \quad \text{donnés,}\end{array}\right. \tag{11}$$

avec $\alpha_k \neq 0, \quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, supposé convergent d'ordre p, la fonction

$$K_p(s) = \sum_{j=0}^{k}\left(\alpha_j (j-s)_+^p - p\beta_j (j-s)_+^{p-1}\right). \quad \text{où, } z_+ = \left\{\begin{array}{lll} z & \text{si} & z \geq 0,\\ 0 & \text{si} & z < 0.\end{array}\right.$$

Q-1 : Montrer que l'erreur de consistance à l'instant t_n s'écrit

$$\mathcal{L}(t_n, x, h) = \frac{h^{p+1}}{p!}\int_0^k K_p(s) x^{(p+1)}(t_n + sh) ds.$$

Q-2 : On considère les schémas d'Adams-Basforth à trois pas suivant

$$x_{n+1} - x_n = h\left(\frac{23}{12}f_n - \frac{16}{12}f_{n-1} + \frac{5}{12}f_{n-2}\right).$$

Montrer que l'erreur de consistance à l'instant t_n vérifie

$$\mathcal{L}(t_n, x, h) = h^{p+1} C_{p+1} x^{(p+1)}(t_n + \theta h), \quad \text{avec} \quad 0 < \theta < 1.$$

On précisera p et on donnera une valeur explicite de la constante C_{p+1}.

Q-3 : Reprendre la question précédente avec le schéma de différentiation rétrograde à trois pas suivant

$$\frac{11}{6}x_{n+1} - 3x_n + \frac{3}{2}x_{n-1} - \frac{1}{3}x_{n-2} = hf_{n+1}.$$

Exercice- 6 *Un exemple de schéma prédicteur correcteur d'ordre 2*

On souhaite construire un schéma prédicteur-correcteur tel que à l'asymptotique lorsque $h \to 0$, la solution exacte à chaque étape, n, soit comprise entre la solution prédite et la solution corrigée.

On sélectionne le premier polynôme caractéristique sous la forme

$$\varrho(z) = z^2 - z. \tag{12}$$

Q-1 : Construire les schémas à deux pas d'ordre deux implicites et explicites de premier polynôme caractéristique (12). ci-dessus.

Q-2 : Montrer que l'on peut en extraire un paire de schémas dont l'un est explicite et l'autre implicite telle que les constantes d'erreur globales soient de même module mais de signes opposées. Ecrire les schémas en obtenus.

Q-3 : Montrer que le schéma prédicteur-correcteur issu de la paire précédente, vérifie la propriété, d'encadrement souhaitée.

Exercice- 7 *Exemple d'étude directe d'un schéma à deux pas.*

On considère le problème différentiel suivant (1) où $t0 = 0$, $x^0 \in \mathbb{R}$ est donné et $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap \mathcal{C}^2([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère le schéma numérique suivant :

$$(P_2) \begin{cases} x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf(t_n, x_n), \quad n \in \{1, \dots N-1\} \\ x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés,} \end{cases}$$

c'est un schéma explicite à 2 pas.

Q-1 : **Consistance**

Pour tout $0 < h < T, h \leq t \leq T - h$ on pose

$$\varepsilon(t,h) = x(t+h) - x(t-h) - 2hf(t, x(t)).$$

Montrer qu'il existe $K_1 > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\varepsilon(t,h)| \leq K_1 h^3 \text{ pour tous } h \in [0,T], t \in [h, T-h].$$

Q-2 : **Stabilité**

On introduit un schéma perturbé du schéma à deux pas (P_2). Soit $(\eta_n)_{0\leq n\leq N-1} \in \mathbb{R}^N$ donné, on considère le schéma perturbé :

$$\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n-1} + 2hf(t_n, \tilde{x}_n) + \eta_n \quad n \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \tilde{x_0}, \tilde{x_1} \in \mathbb{R} \text{ donnés.} \end{cases}$$

Q-2-1 : Etablir qu'il existe une constante $L > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\tilde{x}_{n+1} - x_{n+1}| \leq |\tilde{x}_{n-1} - x_{n-1}| + 2hL|\tilde{x}_n - x_n| + |\eta_n| \quad n \in \{1, \dots, N-1\}.$$

Q-2-2 : Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose $u_n = \max\{|\tilde{x}_n - x_n|, |\tilde{x}_{n-1} - x_{n-1}|\}$. Montrer que

$$u_{n+1} \leq (1 + 2hL)u_n + |\eta_n| \quad n \in \{1, \dots, N-1\}.$$

En déduire qu'il existe une constante $S > 0$ indépendante de h telle que

$$|\tilde{x}_n - x_n| \leq S \left(\max\{|\tilde{x}_0 - x_0|, |\tilde{x}_1 - x_1|\} + \sum_{j=1}^{N-1} |\eta_j| \right), \forall\ 1 \leq n \leq N.$$

On dit alors que le schéma à 2 pas (P_2) est stable.

Q-3 : **Estimation d'erreur**

Q-3-1 : Justifier qu'il existe une constante $K_2 > 0$ indépendante de h telle que

$$|x(t_n) - x_n| \leq S\left(\max\{|x(0) - x_0|, |x(t_1) - x_1|\} + K_2 h^2\right), \forall\ 0 \leq n \leq N.$$

Q-3-2 : Comment choisir x_0 et x_1 pour que le schéma (P_2) soit convergent ?

Q-3-3 : On choisit $x_0 = x^0$ et on calcule x_1 à partir de x_0 en faisant un pas d'une méthode à un pas décrite par une fonction Φ : $x_1 = x_0 + h\Phi(0, x_0, h)$. Quelle méthode choisissez vous ? Expliquer les raisons de votre choix et donner la majoration obtenue pour $x(t_n) - x_n$.