Examen
Mardi 15 Mai 2012 - Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Chacun des exercices porte sur la résolution numérique de l'équation différentielle

$$(ED) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in]t_0, t_0 + T[, \qquad x(t_0) = x^0.$$

Où $f \in \mathcal{C}_{lip} \cap C^p([t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, (l'entier p, ainsi que les réels t_0 et T seront précisés dans chaque exercice). Lorsque T est infini, on se donne un réel $h > 0$. Si T est fini, on fixe un entier N et on définit $h = T/N$. On pose ensuite $t_n = t_0 + nh$ $(0 \leq n \leq N)$ et on désigne par x_n une valeur approchée de $x(t_n)$ pour tout $n \in \{0, \dots N\}$. On désignera par L la constante de Lipschitz de f en espace.

Exercice- 1 *Questions de cours*

Dans cet exercice on suppose $t_0 = 0$, $T < \infty$, $p = 4$. Le réel $L > 0$ désignera toujours la constante de Lipschitz de f en espace. On considère un schéma à un pas convergente d'ordre $q \geq 2$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h\Phi(t_n, x_n, h), \quad n \in \{0, \dots N-1\} \\ x_0 = x^0 \end{cases} \tag{1}$$

On suppose qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que $\forall y_2, y_1 \in \mathbb{R}$, on ait

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq \Lambda |y_2 - y_1|, \quad \forall (t, h) \in [0, T] \times [0, T].$$

On construit un schéma de Runge-Kutta à l'aide de ce schéma de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \frac{h}{6}\Big(p_{n,1} + 4p_{n,2} + p_{n,3}\Big), \quad n \in \{0, \dots N-1\}, \\ p_{n,1} = f(t, x_n), \\ p_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}\Phi(t_n, x_n, \frac{h}{2})\right), \\ p_{n,3} = f(t_n + h, x_n + h\Phi(t_n, x_n, h)), \\ x_0 = x^0. \end{cases} \tag{2}$$

Q-1 : Montrer que ce schéma est stable.

Q-2 : Si ce schéma est consistant, quel serait son ordre maximum de consistance ? Justifier.

Q-3 : Montrer que ce schéma est d'ordre 4 dès que Φ définit un schéma d'ordre au moins 3.

Q-4 : Donnez un point négatif de chacun des choix suivants :
- **Q-4-1 :** Φ définit un schéma d'ordre exactement $q = 2$.
- **Q-4-2 :** Φ définit un schéma d'ordre exactement $q = 4$.

Exercice- 2 *Construction et analyse directe du schéma implicite à 2 pas d'ordre maximal*

Dans toute cet exercice, on va supposer $t_0 = 0$, $T < \infty$, $p = 4$ et L sera toujours la constante de Lipschitz de f en espace. On rappelle qu'un schéma à k pas est défini par :

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \quad n = 0, \dots, N-k, \\ x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R} \quad \text{donnés}, \end{array} \right. \tag{3}$$

avec $\alpha_k \neq 0$, $\quad |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$, où $f_n = f(t_n, x_n)$ pour tout $n = 0, \dots, N$.

Le schéma (S) peut-être défini par la donnée des polynômes $\varrho(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \alpha_i z^i$ et $\sigma(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \beta_i z^i$, appelés respectivement **premier** et **second** polynôme caractéristique de ce schéma.

Partie I : Construction

Q-1 **:** On suppose que le schéma (3) est consistant d'ordre au moins $q \geq 1$. Montrer que

$$\frac{\varrho(z)}{\log z} - \sigma(z) = \mathcal{O}((z-1)^q) \quad \text{quand} \quad z \to 1. \tag{4}$$

Q-2 **: Construction de schémas à deux pas, implicites, stables et d'ordre maximum.**

Q-2**-**1 **:** Montrer que dans le schéma à k pas (3), on peut toujours s'arranger à ce que $\alpha_k = 1$.

Q-2**-**2 **:** En déduire que tout schéma implicite à deux pas stable a pour premier polynôme caractéristique :

$$\varrho(z) = (z-1)(z-\lambda), \quad -1 \leq \lambda < 1. \tag{5}$$

Q-2**-**3 **:** Montrer que pour cette expression de $\varrho(z)$, lorsque $z \to 1$, on a :

$$\frac{\varrho(z)}{\log z} = (1-\lambda) + \frac{3-\lambda}{2}(z-1) + \frac{5+\lambda}{12}(z-1)^2 - \frac{1+\lambda}{24}(z-1)^3 + \frac{11+19\lambda}{720}(z-1)^4 + \dots \tag{6}$$

Q-2**-**4 **:** Fournir alors l'expression de $\sigma(z)$ pour que le schéma à deux pas défini par les polynômes (ϱ, σ) soit d'ordre maximum. En déduire que le schéma associé est donné par

$$x_{n+2} - (1+\lambda)x_{n+1} + \lambda x_n = h\left(\frac{5+\lambda}{12} f_{n+2} + \frac{2-2\lambda}{3} f_{n+1} - \frac{1+5\lambda}{12} f_n\right). \tag{7}$$

Q-2**-**5 **:** Montrer que si $\lambda \neq -1$ le schéma est d'ordre exactement 3. Montrer que la constante d'erreur globale est alors donnée par : $\quad C_4 = -\dfrac{1}{24}\dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$.

Q-2**-**6 **:** Ecrire le schéma lorsque $\lambda = -1$ et préciser la valeur de la constante d'erreur. (*Attention cette question ne nécessite pas de refaire les calculs*).

Partie II : Etude directe

On considère le schéma numérique suivant :

$$(S_2)\begin{cases} x_{n+1} = x_{n-1} + \dfrac{h}{3}\left(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1}\right), \quad n \in \{1, \dots N-1\} \\ x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés}, \end{cases} \tag{8}$$

Q-3 : Constructibilité : Montrer qu'il existe $h_* > 0$ (que l'on précisera) tel que pour tout $0 < h < h_*$, le schéma (S_2) de pas h est constructible.
Dans toute la suite de l'exercice, on supposera fixé un réel $h_0 > 0$, tel que $0 < h \leq h_0 < h_*$.

Q-4 : Consistance : Pour tout $0 < h < h_*$ et $t \in [h, T-h]$, on pose

$$\varepsilon(t,h) = x(t+h) - x(t-h) - \frac{h}{3}\Big(f(t+h, x(t+h)) + 4f(t, x(t)) + f(t-h, x(t-h))\Big).$$

Montrer qu'il existe une constante $K_1 > 0$ (indépendante de h) telle que

$$|\varepsilon(t,h)| \leq K_1 h^5. \tag{9}$$

Q-5 : Stabilité : Soit $(\eta_n)_{1\leq n\leq N-1} \in \mathbb{R}^{N-1}$ donné, on considère le schéma perturbé :

$$(\tilde{S}_2)\begin{cases} \tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_{n-1} + \dfrac{h}{3}\Big(f(t_{n+1}, \tilde{x}_{n+1}) + 4f(t_n, \tilde{x}_n) + f(t_{n-1}, \tilde{x}_{n-1})\Big) + \eta_n, \ n \in \{1, \dots, N-1\}, \\ \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \mathbb{R} \text{ donnés}. \end{cases} \tag{10}$$

Q-5-1 : Montrer que pour tout $0 < h \leq h_0$, le schéma $(\tilde{S}_2)$ de pas h est constructible.

Q-5-2 : Pour tout $1 \leq n \leq N$, on pose $u_n = \max\{|\tilde{x}_n - x_n|, |\tilde{x}_{n-1} - x_{n-1}|\}$. Montrer que

$$u_{n+1} \leq \left(1 + h\frac{2L}{1 - \frac{Lh_0}{3}}\right) u_n + \frac{|\eta_n|}{1 - \frac{Lh_0}{3}} \quad n \in \{1, \dots, N-1\}. \tag{11}$$

Q-5-3 : En déduire l'existence d'une constante $S > 0$ indépendante de h telle que $\forall 0 < h \leq h_0$,

$$\max_{0\leq n\leq N} |\tilde{x}_n - x_n| \leq S\left(\max\{|\tilde{x}_0 - x_0|, |\tilde{x}_1 - x_1|\} + \sum_{j=1}^{N-1} |\eta_j|\right). \tag{12}$$

Q-6 : Estimation d'erreur :

Q-6-1 : Déduire des questions précédentes qu'il existe une constante $K_2 > 0$ (indépendante de h) telle que pour tout $0 < h \leq h_0$ on ait

$$\max_{0\leq n\leq N} |x(t_n) - x_n| \leq S\Big(\max\{|x(0) - x_0|, |x(h) - x_1|\} + K_2 h^4\Big). \tag{13}$$

Q-6-2 : Comment choisir x_0 et x_1 pour que le schéma (S_2) soit convergent ?

Q-7 : Initialisation : On suppose que $x_0 = x^0$ et on calcule x_1 à partir de x_0 en faisant un pas d'un schéma explicite à un pas : $x_1 = x_0 + h\,\Phi(0, x_0, h)$.

Q-7-1 : Préciser au moins une méthode à un pas que l'on peut utiliser et pour laquelle il existe une constante $K_3 > 0$ telle que pour tout $0 < h \leq h_0$, on ait

$$\max_{0\leq n\leq N} |x(t_n) - x_n| \leq K_3 h^4. \tag{14}$$

Q-7-2 : Préciser alors x_1 en fonction de x_0 et h.