Feuille de TP 5

Exercice 1. [Fonction `quadl` de `Matlab`]
La fonction `quadl` de `Matlab` évalue des intégrales définies. Un argument optionnel (d'usage facultatif) `tol` permet de spécifier la précision souhaitée (pour obtenir une description détaillée de cette fonction, faire `doc quadl` ou bien `help quadl`).
Expérimenter l'emploi de `quadl` pour le calcul de $I = \int_3^5 e^{-x^3}\,dx$. En faisant deux appels successifs à `quadl` on pourra :
- D'abord (sans utiliser l'argument `tol`) obtenir une valeur indicative $\widetilde{I}_{ap}$ de l'intégrale ;
- Ensuite, obtenir une valeur I_{ap} dont la précision est δ. Tester avec $\delta = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-15}$. Afficher les valeurs obrtenues en utilisant 15 cases décimales.

Exercice 2. [Méthodes de Newton-Cotes]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)\,dx$, on utilise une formule de quadrature composée, dont le principe est le suivant : on considère $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}],\ i = 0, \ldots, n-1$, de pas $h = \frac{b-a}{n}$. On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx,$$

et pour déterminer une valeur approchée de I, on approche chaque intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$, pour $i = 0, \ldots, n-1$, par une formule de quadrature élémentaire.
Dans cet exercice on considérera des *formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes à N points* : si $[\alpha, \beta]$ est un intervalle et $x_1, \ldots, x_N$ sont N points équirépartis dans $[\alpha, \beta]$, une formule de Newton-Cotes à N points pour approcher $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ consiste à remplacer f dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange P aux points $x_i,\ i = 1, \ldots, N$, et à approcher $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ par $\int_\alpha^\beta P(x)\,dx$. Deux exemples de tels formules sont :
- *Formule des trapèzes* (NC à 2 points) :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}(\beta - \alpha);$$

- *Formule de Simpson* (NC à 3 points) :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \frac{1}{6}\Big(f(\alpha) + 4f\big(\frac{\alpha+\beta}{2}\big) + f(\beta)\Big)(\beta - \alpha);$$

1. Programmer dans des fonctions `I=trapezes(f,a,b,n)` et `I=simpson(f,a,b,n)` les méthodes des trapèzes et de Simpson pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$. Les arguments des fonctions `trapezes` et `simpson` sont la fonction f, les extrémités de l'intervalle $[a,b]$ et le nombre d'intervalles n de la subdivision considérée de $[a,b]$. En sortie, ces fonctions retournent une valeur approchée `I` de I.

Soit $f : [-1, \sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et soit $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} f(t)\,dt$.
On se propose de comparer les valeurs obtenues avec les formules de quadrature composées des trapèzes et de Simpson pour calculer une valeur approchée de I.

2. Calculer à la main la valeur exacte de I. Faire afficher cette valeur avec 15 décimales, en utilisant la commande `fprintf`.

3. Utiliser convenablement la fonction Matlab `quadl` pour vérifier la valeur obtenue à la question précédente.
4. Calculer successivement les valeurs approchées I_n de I que donne la méthode des trapèzes avec une subdivision de $[-1, \sqrt{3}]$ en $n = 2^m$ intervalles, avec $m = 1, 2, \dots, 12$. Afficher les valeurs n, h_n (le pas de la subdivision), I_n, $E_n = |I - I_n|$ (l'erreur commise) et $E_n/{h_n}^2$, en respectant le mode de présentation ci-dessous :

   ```
   n        h                 I              E          E/h^2

   2  1.366e+00  1.716894452407194  1.157e-01  6.200412e-02
   4  6.830e-01  1.804266173699645  2.833e-02  6.072702e-02
   ```

   Indication : Éviter l'écriture de boucles, en utilisant la commande `sum(X)` pour calculer la somme des composantes d'un vecteur `X`.

   Les valeurs affichées pour $E_n/{h_n}^2$ confirment-elles le comportement établi en cours ?

   Tracer (en utilisant le marqueur `+`) les points de coordonnées $(\ln(h_n), \ln(E_n))$ puis ajouter sur la figure le tracé de la droite de pente 2 passant par le dernier de ces points. Qu'observe-t-on ? Commenter.
5. Refaire entièrement l'étude faite à la question précédente maintenant pour la méthode de Simpson, en remplaçant la puissance 2 par la puissance 4 dans le terme $E_n/{h_n}^4$ et en choisissant une droite de pente convenable pour mettre en évidence le comportement de E_n en fonction de h_n.
6. En comparant les valeurs de l'erreur obtenue avec chacune des méthodes, comparer le nombre de sous-intervalles n dont on doit diviser l'intervalle $[-1, \sqrt{3}]$ pour obtenir la valeur de I à 10^{-8} près par la méthode des trapèzes et par la méthode de Simpson.