Devoir Surveillé - 5 février 2013
(Durée : 2h00)

TRÈS IMPORTANT - Consignes :

- La consultation de documents de cours et de TP, ainsi que des précédents travaux réalisés par vous en TP, est autorisée. **La consultation de pages Internet, en particulier de votre messagerie électronique, est interdite. Le non respect de cette règle entraînera l'annulation de votre note**.

- Commencez par créer, avec la commande `mkdir`, un répertoire `M315DS1###` où `###` est votre NOM. Travaillez dans ce répertoire. En particulier, si vous souhaitez utiliser des fichiers enregistrés dans d'autres répertoires, recopiez-les.

- Lorsque la réponse à une question nécessite des commentaires rédigés, vous devez mettre ces commentaires dans vos fichiers en utilisant le symbole %.

- A la fin de l'examen, vous devez envoyer, selon votre groupe de TP, votre répertoire `M315DS1_###` par mail à l'une des adresses suivantes :
– `filipa.caetano@math.u-psud.fr` (groupe 1),
– `jean-baptiste.apoung@math.u-psud.fr` (groupe 2),
– `guilhem.lepoultier@math.u-psud.fr` (groupe 3).

Exercice 1 - La méthode de la sécante

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Supposons que f admet un unique zéro c dans I. La **méthode de la sécante** pour approcher c consiste à choisir $x_0,\ x_1 \in I$ et à définir (tant que c'est possible) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n), \quad n \geq 1.$$

On montre que, si $f'(c)f''(c) \neq 0$ et si $x_0,\ x_1$ sont choisis suffisamment proche de c, la suite x_n converge vers c.

1. Écrire une fonction Matlab `[c,X,N]=secante(f,x0,x1,prec,Nmax)` qui calcule une solution approchée `c` de $\texttt{f}(x) = 0$ par la méthode de la sécante. Les arguments d'entrée de la fonction `secante` sont la fonction `f`, les points `x0` et `x1` d'initialisation de la suite (x_n), la précision voulue `prec` et le nombre maximal d'itérations autorisées de l'algorithme `Nmax`. En sortie, `N` est l'ordre du dernier terme calculé de la suite (x_n), `X` est un vecteur contenant tous les termes calculés de la suite (x_n) et `c` est la dernière valeur $x_{\texttt{N}}$ calculée. On arrêtera l'algorithme si $|f(x_{\texttt{N}})| \leq \texttt{prec}$ ou si $\texttt{N} = \texttt{Nmax}$.

Soit $g(x) = \cos^2(2x) - x^2$ définie sur l'intervalle $I = [0, 1.5]$.

2. Représenter graphiquement g dans I, ainsi que la droite $y = 0$ et constater sur le graphique l'existence d'un unique zéro de g dans cet intervalle.
3. Soit $x_0 = 0$ et $x_1 = 0.75$. Calculer le troisième terme de la suite de la méthode de la sécante x_2. Représenter sur le graphique de la question 1.) les points $(x_0, g(x_0))$, $(x_1, g(x_1))$ et $(x_2, 0)$, en marquant les deux premiers avec le symbole `*` en rouge et le dernier avec une autre couleur. Représenter ensuite le segment de droite joignant $(x_0, g(x_0))$ et $(x_1, g(x_1))$ et le segment de droite joignant $(x_1, g(x_1))$ et $(x_2, 0)$. Comment peut-on interpréter géométriquement le point x_2 ?

Dans la suite on cherchera à calculer une solution approchée `c` de la solution de $g(x) = 0$ dans I, vérifiant $|g(\texttt{c})| \leq 10^{-15}$, et on fixera `Nmax`=100.

4. Utiliser la méthode de la sécante pour calculer une valeur approchée du zéro de g dans I, en initialisant la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par x_0 et x_1. Représenter sur la même figure le point $(\texttt{c}, g(\texttt{c}))$, avec le symbole $+$.
5. Afficher à l'écran la valeur approchée de `c` obtenue, ainsi que son image $g(\texttt{c})$ et le nombre d'itérations de l'algorithme effectuées, en respectant le format suivant :
   ```
   zero de g : c=0.8603335890193798
   g(c) vaut -1.1102e-16
   8 itérations effectuées
   ```
   Remarque : Les valeurs ne sont pas réelles !
6. Soit `N` l'ordre du dernier terme calculé de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On prend pour c sa valeur approchée calculée, c'est-à-dire $c = \texttt{c}$. Calculer et représenter graphiquement dans 3 figures différentes les suites suivantes :

$$e2 = \frac{|x_n - c|}{(x_{n-1} - c)^2}, \quad n = 1, \ldots, \texttt{N} - 1,$$
$$e1 = \frac{|x_n - c|}{|x_{n-1} - c|}, \quad n = 1, \ldots, \texttt{N} - 1,$$
$$\tilde{e} = \frac{\log|x_n - c|}{\log|x_{n-1} - c|}, \quad n = 1, \ldots, \texttt{N} - 1.$$

   Que pourrait-on en déduire, d'après les deux premières figures, sur l'ordre de convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Faire un lien entre la dernière figure et l'ordre de convergence de la suite de la méthode de la sécante.

Exercice 2 - Intersection de deux courbes du plan

Considérons la courbe C_1, d'équation $y - x = 2\cos(\frac{x+y}{2})$, et la courbe C_2, d'équation $x^2 + y^2 = 16$.

1. Représenter dans la même figure les courbes C_1 et C_2. Mettre des légendes et utiliser des couleurs différentes pour chaque courbe. Pour représenter la courbe C_1, remarquer que celle-ci peut se paramétrer à l'aide du paramètre $t = \frac{x+y}{2}$ par les équations

$$\begin{cases} x = t - \cos(t) \\ y = t + \cos(t). \end{cases}$$

   On remarquera que les deux courbes s'intersectent en deux points distincts du plan.

On s'intéresse à calculer les deux points d'intersection des courbes C_1 et C_2, à l'aide de la méthode de Newton. Les coordonnées de ces points sont solution de l'équation $F(x, y) = (0, 0)$, où $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une fonction à préciser.

2. Définir dans des fonctions Matlab de la forme `Y=F(X)` et `M=DF(X)` la fonction F ainsi que sa matrice jacobienne DF. L'argument de `F` et de `DF` est un vecteur colonne `X` de taille 2 dont les composantes sont les coordonnés x et y d'un point $X \in \mathbb{R}^2$. La fonction `F` doit retourner un vecteur colonne `Y` de taille 2 dont les composantes sont $(F_1(X), F_2(X))$; la fonction `DF` doit retourner une matrice `M` de taille 2×2 dont les composantes sont les dérivés partielles de F_1 et de F_2 en `X`.
3. Utiliser la fonction `newton2d` que vous avez programmé au TP3 pour obtenir des valeurs approchées des 2 points d'intersection des deux courbes, avec une précision de 10^{-8}. Représenter dans le même graphique que pour la question 1) les 2 points obtenus avec 2 symboles différents. Afficher les valeurs approchées des coordonnées (x, y) des deux points obtenus par la méthode de Newton, ainsi que la valeur approchée de $F(x, y)$ que vous avez obtenue, en utilisant 10 cases décimales.