Université Paris-Sud | **Travaux pratiques**
L3 Mathématiques | **2012-2013**
M315 - Calcul Scientifique

Feuille de TP 5

Exercice 1. [Fonction `quadl` de `Matlab`]
La fonction `quadl` de `Matlab` évalue des intégrales définies. Un argument optionnel (d'usage facultatif) `tol` permet de spécifier la précision souhaitée (pour obtenir une description détaillée de cette fonction, faire `doc quadl` ou bien `help quadl`).
Expérimenter l'emploi de `quadl` pour le calcul de $I = \int_3^5 e^{-x^3}\,dx$. En faisant deux appels successifs à `quadl` on pourra :
– D'abord (sans utiliser l'argument `tol`) obtenir une valeur indicative $\widetilde{I}_{ap}$ de l'intégrale ;
– Ensuite, obtenir une valeur I_{ap} dont la précision est δ (tester avec $\delta = 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}, 10^{-15}$).

Exercice 2. [Méthodes de Newton-Cotes]
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour calculer une valeur approchée de $I = \int_a^b f(x)\,dx$, on utilise une formule de quadrature composée, dont le principe est le suivant : on considère $n \in \mathbb{N}$ et $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ en n intervalles $[a_i, a_{i+1}],\ i = 0,\ldots,n-1$, de pas $h = \frac{b-a}{n}$. On a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx + \cdots \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,dx,$$

et pour déterminer une valeur approchée de I, on approche chaque intégrale $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$, pour $i = 0,\ldots,n-1$, par une formule de quadrature élémentaire.
Dans cet exercice on considérera des *formules de quadrature élémentaires de Newton-Cotes* à N *points* : si $[\alpha,\beta]$ est un intervalle et $x_1,\ldots,x_N$ sont N points équirépartis dans $[\alpha,\beta]$, une formule de Newton-Cotes à N points pour approcher $I = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ consiste à remplacer f dans l'intervalle $[\alpha,\beta]$ par son polynôme d'interpolation de Lagrange P aux points $x_i,\ i = 1,\ldots,N$, et à approcher $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ par $\int_\alpha^\beta P(x)\,dx$. Deux exemples de tels formules sont :
– *Formule des trapèzes* (NC à 2 points) :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha);$$

– *Formule de Simpson* (NC à 3 points) :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \simeq \frac{1}{6}\Big(f(\alpha) + 4f\big(\frac{\alpha+\beta}{2}\big) + f(\beta)\Big)(\beta-\alpha);$$

1. Programmer dans des fonctions `I=trapezes(f,a,b,n)` et `I=simpson(f,a,b,n)` les méthodes des trapèzes et de Simpson pour calculer une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$. Les arguments des fonctions `trapezes` et `simpson` sont la fonction f, les extrémités de l'intervalle $[a,b]$ et le nombre d'intervalles n de la subdivision considérée de $[a,b]$. En sortie, ces fonctions retournent une valeur approchée `I` de I.

Soit $f : [-1,\sqrt{3}] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et soit $I = \int_{-1}^{\sqrt{3}} f(t)\,dt$.
On se propose de comparer les valeurs obtenues avec les formules de quadrature composées des trapèzes et de Simpson pour calculer une valeur approchée de I.

2. Calculer à la main la valeur exacte de I. Faire afficher cette valeur avec 15 décimales, en utilisant la commande `fprintf`.

3. Utiliser convenablement la fonction Matlab `quadl` pour vérifier la valeur obtenue à la question précédente.
4. Calculer successivement les valeurs approchées I_n de I que donne la méthode des trapèzes avec une subdivision de $[-1, \sqrt{3}]$ en $n = 2^m$ intervalles, avec $m = 1, 2, \ldots, 12$. Afficher les valeurs n, h_n (le pas de la subdivision), I_n, $E_n = |I - I_n|$ (l'erreur commise) et $E_n/{h_n}^2$, en respectant le mode de présentation ci-dessous :

```
n      h              I              E          E/h^2

2  1.366e+00  1.716894452407194  1.157e-01  6.200412e-02
4  6.830e-01  1.804266173699645  2.833e-02  6.072702e-02
```

   Indication : Éviter l'écriture de boucles, en utilisant la commande `sum(X)` pour calculer la somme des composantes d'un vecteur `X`.
   Les valeurs affichées pour $E_n/{h_n}^2$ confirment-elles le comportement établi en cours ?
   Tracer (en utilisant le marqueur `+`) les points de coordonnées $(\ln(h_n), \ln(E_n))$ puis ajouter sur la figure le tracé de la droite de pente 2 passant par le dernier de ces points. Qu'observe-t-on ? Commenter.
5. Refaire entièrement l'étude faite à la question précédente maintenant pour la méthode de Simpson, en remplaçant la puissance 2 par la puissance 4 dans le terme $E_n/{h_n}^4$ et en choisissant une droite de pente convenable pour mettre en évidence le comportement de E_n en fonction de h_n.
6. En comparant les valeurs de l'erreur obtenue avec chacune des méthodes, comparer le nombre de sous-intervalles n dont on doit diviser l'intervalle $[-1, \sqrt{3}]$ pour obtenir la valeur de I à 10^{-8} près par la méthode des trapèzes et par la méthode de Simpson.

Exercice 3. [Régularité versus vitesse de convergence]
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = |2x^4 - 1|$. On souhaite approcher $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ par la méthode de Simpson.

1. Calculer à la main I.
2. Calculer successivement les valeurs approchées I_n que donne la méthode de Simpson avec subdivision de $[0, 1]$ en $n = 2^m$ intervalles, avec $m = 2, 2, \ldots, 12$. Soit $h_n = \frac{1}{n}$. Représenter dans 3 figures différentes $E_n = |I_n - I|$, $\frac{E_n}{{h_n}^2}$ et $\frac{E_n}{{h_n}^4}$, en fonction de h_n. Représenter également dans une autre figure les points $(\ln(h_n), \ln(E_n))$, puis ajouter sur la figure le tracé de la droite de pente 2 passant par le dernier de ces points. Que peut-on dire sur la vitesse de convergence de la suite I_n ? Ce résultat était-t-il attendu ? Justifier la différence obtenue par rapport au comportement habituel de l'erreur en $O(h^4)$.
3. Tracer à nouveau le même type de courbes que dans la question précédente (en faisant les ajustements qui vous semblent convenables), mais en écrivant maintenant

$$I = \int_0^{2^{-\frac{1}{4}}} f(x)\,dx + \int_{2^{-\frac{1}{4}}}^1 f(x)\,dx,$$

   et en approchant les deux intégrales sur $[0, 2^{-\frac{1}{4}}]$ et sur $[2^{-\frac{1}{4}}, 1]$ par la formule de Simpson ayant comme base une subdivision de chacun de ces intervalles en $n/2$ sous-intervalles, pour les mêmes valeurs de n que dans la question précédente. Qu'observe-t-on ? Commenter.

Exercice 4. [Une intégrale 2D]
On considère le rectangle $D = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1]$ et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{1}{1+y\cos(x)}$. Pour calculer une valeur approchée de $I = \iint_D f(x, y)\,dxdy$ on utilise une méthode de quadrature qui généralise pour un rectangle le principe de la méthode du point milieu composée sur un intervalle de $\mathbb{R}$: pour $n \in \mathbb{N}$ donné, on partage D en n^2 petits rectangles de même taille $h_x \times h_y$ où $h_x = \pi/(2n)$ et $h_y = 1/n$, et on pose

$$I_n = h_x h_y \sum_{i,j=1}^{n} f(P_{i,j})$$

où les points $P_{i,j}$ correspondent aux centres des n^2 petits rectangles.

On admettra que la valeur de I est $\pi^2/8$.
Calculer I_n pour $n = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$, et afficher les valeurs de n, I_n et de $E_n = |I_n - I|$, en respectant les formats ci-dessous

```
n          In               En
2     1.214517168012      1.92e-02
```

Représenter graphiquement $n^2 E_n$ en fonction de $h_{y_n} = \frac{1}{n}$. Commenter le résultat obtenu.

Indication : pour chaque valeur de n, on conseille de construire les vecteurs `X` et `Y` de longueur n tels que les points $P_{i,j}$ aient pour coordonnées $(\mathtt{X}_i, \mathtt{Y}_j)$.